

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALINE ROBERTA SANTOS RIGHI

VERIFICAÇÃO DE FORMAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE  
CONTORNO EM PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE DIFUSÃO DE CALOR  
UTILIZANDO MALHAS NÃO-ORTOGONAIS COM O MÉTODO DOS  
VOLUMES FINITOS

CURITIBA

2019

ALINE ROBERTA SANTOS RIGHI

VERIFICAÇÃO DE FORMAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE  
CONTORNO EM PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE DIFUSÃO DE CALOR  
UTILIZANDO MALHAS NÃO-ORTOGONAIS COM O MÉTODO DOS  
VOLUMES FINITOS

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki

CURITIBA

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas,  
UFPR Biblioteca de Ciência e Tecnologia

R571v

Righi, Aline Roberta Santos

Verificação de formas de aplicação de condições de contorno em problemas bidimensionais utilizando malhas estruturadas não ortogonais com o método dos volumes Finitos [recurso eletrônico] / Aline Roberta Santos Righi. – Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2019.

Orientador: Luciano Kiyoshi Araki.

1. Dinâmica dos fluidos computacional. 2. Dinâmica dos fluidos. 3. Análise de erros (Matemática). 4. cálculos numéricos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Araki, Luciano Kiyoshi. III. Título.

CDD: 532.05

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB-9/1928



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA  
MECÂNICA - 40001016040P5

### TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **ALINE ROBERTA SANTOS RIGHI** intitulada: **VERIFICAÇÃO DE FORMAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTO RNO EM PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE DIFUSÃO DE CALOR UTILIZANDO MALHAS NÃO-ORTOGONAIS COM O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS**, sob orientação do Prof. Dr. **LUCIANO KIYOSHI ARAKI**, que após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 18 de Julho de 2019.

LUCIANO KIYOSHI ARAKI

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

  
ADMILSON TEIXEIRA FRANCO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

  
EDUARDO MATOS GERMER

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)



*“Elevo os meus olhos para os montes: de onde me virá o socorro? O meu  
socorro vem do Senhor, que fez o céu e a terra.”*

*Salmos 121:1-2*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela força e constante presença em minha vida, mesmo quando tudo parece perdido. Agradeço aos meus pais e minha irmã, por serem além de minha base, o meu suporte e amor incondicional mesmo distante durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki pela confiança, paciência e orientação para construção deste trabalho. Agradeço por ter me acompanhado, transmitido seus conhecimentos com excelência, pela ajuda e atenção.

Agradeço grandemente aos meus amigos do Laboratório de Experimentação Numérica (LENA-1), pelo apoio, amizade, otimismo, conversas durante os cafés e almoços que também tanto me ajudaram. Agradeço em especial ao meu querido amigo Antônio Carlos Foltran, pela incansável ajuda e paciência. Ao meu grande amigo Luciano pela ajuda, favores, paciência, amizade e carinho comigo. Também aos meus amigos, Daiane, Izabel, Carol, Fillipe e Nicholas, que foram além de ajuda e conversas nos momentos de descontração e dificuldades, minhas companhias diárias durante essa jornada.

Agradeço aos professores que fizeram parte dessa trajetória. Aos meus amigos Roberta, Patrícia, Sara, Gabriel, Pedro, Gabrielle, Geisiel, Matias e Carol pela confiança depositada em mim, que eu seria capaz. Obrigada, sempre, pela amizade, carinho, companheirismo e confiança. Vocês são essenciais, e sem vocês eu jamais teria chegado aqui.

Agradeço também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento deste trabalho. Ao programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica (PG-Mec), pela estrutura física e disponibilidade de equipamentos.

Por fim, agradeço aos membros da banca, ao Prof. Dr. Admilson Teixeira Franco e ao Prof. Dr. Eduardo Matos Germer, pela disponibilidade e tempo investido na leitura deste trabalho, pelas sugestões indicadas ao fechamento da dissertação.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo a análise e verificação da ordem do erro de discretização relacionado às técnicas de aplicação de condições de contorno com o método dos volumes finitos. Para isso, são considerados: malhas estruturadas não ortogonais geradas através de interpolação de Lagrange e equações elípticas; equação de Poisson; bidimensional; cinco variáveis com aproximações numéricas de segunda ordem; transformação de coordenadas; *Gauss-Seidel*; Fortran; precisão dupla; erro de máquina. As técnicas para aplicação das condições de contorno utilizadas são: volumes fictícios, balanço de volumes e volumes de espessura zero; e são aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e Neumann para duas geometrias, sendo elas, a geometria do L e do trapézio. A principal conclusão é que há degeneração da ordem calculada *a priori* e obtida *a posteriori* para a maioria dos casos estudados, onde apresentou-se possíveis motivos para os resultados. Como por exemplo, o emprego da malha não ortogonal. Além disso, observou-se que o menor erro numérico obtido é para os volumes fictícios; enquanto de um modo geral, os melhores valores para as ordens aparente e efetiva obtidas são para a técnica de balanço de volumes.

Palavras-chaves: Dinâmica dos fluidos computacional. Malhas estruturadas não ortogonais. Método dos volumes finitos. Técnicas de aplicar condições de contorno. Dirichlet e Neumann.

## ABSTRACT

The main goal in the present work is the analysis and verification of the effect in the discretization error caused by the boundary conditions applications methodologies with the finite volume method. In order to do this, the considered aspects are: nonorthogonal structured grids created by Lagrange's interpolation and elliptical equations; Poisson's equation; two-dimensional; five variables of interest with numerical interpolation schemes of second order; coordinate transformation; Gauss-Seidel; Fortran; double precision; machine round-off error. Further, the applications of boundary conditions methodologies considered are: with ghost volumes, without ghost volumes and volume of zero thickness; where are applied the Dirichlet and Neumann boundary conditions for two geometries, the L-shape and trapezoidal. The first main conclusion is that there are degenerations for the orders calculated *a priori* and verified *a posteriori*, where it is cited some reasons for the results. For example, applying non-orthogonal grids. Other than that, the smallest numerical error obtained is for the ghost cells methodology; while in general, without ghost cell methodology obtained better results when it comes to the orders apparent and effective.

Key-words: Computacional fluid dynamics. Structured non-orthogonal grids. Finite volume method. Boundary conditions applications methodologies. Dirichlet e Neumann.



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO UTILIZANDO O MVF BIDIMENSIONAL.....	31
FIGURA 2 - a) REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA QUE CONTÉM UM ORIFÍCIO; b) GEOMETRIA DISCRETIZADA COM A MALHA ESTRUTURADA ORTOGONAL.....	33
FIGURA 3 - a) DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO MALHAS ESTRUTURADAS NÃO ORTOGONAIS; b) COM MALHAS NÃO ESTRUTURADAS.....	34
FIGURA 4 – (a) PLANO FÍSICO COM MALHA ESTRUTURADA NÃO ORTOGONAL; (b) CORRESPONDÊNCIA DOS PONTOS 1 E 2 NO PLANO COMPUTACIONAL.....	36
FIGURA 5 - TRAPÉZIO COM UMA MALHA GROSSA DE 2X2 VOLUMES.....	39
FIGURA 6 - MALHA DE 4X4 VOLUMES APÓS O REFINO UNIFORME.....	39
FIGURA 7 - REPRESENTAÇÃO DA REGRA DO RETÂNGULO.....	40
FIGURA 8 - CONDIÇÃO DE CONTOURNO COM VOLUME FICTÍCIO.....	42
FIGURA 9 - CONDIÇÃO DE CONTOURNO COM VOLUME DE ESPESSURA ZERO.....	43
FIGURA 10 - CONDIÇÕES DE CONTOURNO COM BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA BIDIMENSIONAL.....	43
FIGURA 11 - GEOMETRIAS UTILIZADAS PARA ANÁLISE.....	55
FIGURA 12 - PONTOS REPRESENTADOS PARA GERAÇÃO DA MALHA.....	60
FIGURA 13 - EXEMPLOS DAS MALHAS GERADAS ATRAVÉS DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS PARA AMBOS DOMÍNIOS ESTUDADOS: (A) EM FORMATO DE L; (B) TRAPÉZIO.....	60
FIGURA 14 - EXEMPLO DA INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE.....	62
FIGURA 15 - EXEMPLOS DAS MALHAS GERADAS ATRAVÉS DE INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE: A) EM FORMATO DE L; B) TRAPÉZIO.....	62
FIGURA 16 - EXEMPLOS DE MALHA PARA A GEOMETRIA EM L PARA A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA E VOLUMES FICTÍCIOS.....	65
FIGURA 17 - EXEMPLOS DE MALHA PARA A GEOMETRIA DO TRAPÉZIO PARA AS TÉCNICAS DE VOLUMES FICTÍCIOS E BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA.....	65
FIGURA 18 - EXEMPLOS DE MALHAS GERADAS PARA A GEOMETRIA EM L COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.....	65
FIGURA 19 - EXEMPLOS DE MALHAS GERADAS PARA O TRAPÉZIO COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.....	66
FIGURA 20 - VOLUMES NO CENTRO DO DOMÍNIO UTILIZADOS PARA CÁLCULOS.....	66
FIGURA 21 - CAMPO DE TEMPERATURAS ANALÍTICAS PARA O L.....	70
FIGURA 22 - CAMPO DE TEMPERATURAS NUMÉRICAS PARA O L.....	70
FIGURA 23 - ISOTERMAS PARA A GEOMETRIA DO L.....	71
FIGURA 24 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA VOLUMES FICTÍCIOS COM CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE DIRICHLET.....	72
FIGURA 25 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADO DA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE DIRICHLET COM VOLUMES FICTÍCIOS.....	72
FIGURA 26 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	73
FIGURA 27 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	74
FIGURA 28 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	74
FIGURA 29 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.....	74
FIGURA 30 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.....	75
FIGURA 31 – CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÕES DE CONTOURNO DE DIRICHLET COM VOLUMES FICTÍCIOS.....	75
FIGURA 32 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	76
FIGURA 33 - ORDEM APARENTE BASEADA NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	76

FIGURA 34 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	77
FIGURA 35 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA E NO FLUXO NA FACE LESTE. ....	77
FIGURA 36 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	77
FIGURA 37 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET PARA VOLUMES FICTÍCIOS. ....	78
FIGURA 38 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA VOLUMES FICTÍCIOS COM CONDIÇÕES DE CONTORNO DE NEUMANN. ....	79
FIGURA 39 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN COM VOLUMES FICTÍCIOS.....	79
FIGURA 40 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS. ....	80
FIGURA 41 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	80
FIGURA 42 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	80
FIGURA 43 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	81
FIGURA 44 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	81
FIGURA 45 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN COM VOLUMES FICTÍCIOS. ....	82
FIGURA 46 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	82
FIGURA 47 - ORDEM APARENTE (pU) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO. ....	83
FIGURA 48 - ORDEM EFETIVA BASEADA NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	83
FIGURA 49 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA E FLUXO MÉDIO NO CONTORNO LESTE.....	84
FIGURA 50 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA E FLUXO MÉDIO NO CONTORNO LESTE.....	84
FIGURA 51 - CAMPO DE TEMPERATURAS DO ERRO NUMÉRICO PARA MALHAS ELÍPTICAS ATRAVÉS DE VOLUMES FICTÍCIOS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN. ....	84
FIGURA 52 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA BALANÇO DE VOLUMES COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET. ....	86
FIGURA 53 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM BALANÇO DE VOLUMES. ....	87
FIGURA 54 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	87
FIGURA 55 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	88
FIGURA 56 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	88
FIGURA 57 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E NO FLUXO NA FACE LESTE.....	89
FIGURA 58 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA ICL E DCL.....	89
FIGURA 59 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET PARA BALANÇO DE VOLUMES. ....	89
FIGURA 60 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	90
FIGURA 61 -ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	90

FIGURA 62 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	91
FIGURA 63 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	91
FIGURA 64 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA ICL E DCL.....	92
FIGURA 65 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET PARA BALANÇO DE VOLUMES. ....	92
FIGURA 66 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA BALANÇO DE VOLUMES COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN. ....	93
FIGURA 67 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN COM BALANÇO DE VOLUMES. ....	94
FIGURA 68 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	95
FIGURA 69 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	95
FIGURA 70 - ORDEM EFETIVA BASEADA NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	95
FIGURA 71 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NO CONTORNO LESTE.....	96
FIGURA 72 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	96
FIGURA 73 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN PARA BALANÇO DE VOLUMES. ....	96
FIGURA 74 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	97
FIGURA 75 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	97
FIGURA 76 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	98
FIGURA 77 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	98
FIGURA 78 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	99
FIGURA 79 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN PARA BALANÇO DE VOLUMES. ....	99
FIGURA 80 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET. ...	100
FIGURA 81 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.....	101
FIGURA 82 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	102
FIGURA 83 - ORDEM APARENTE PARA OS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS. ....	102
FIGURA 84 - ORDEM EFETIVA PARA OS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS. ....	102
FIGURA 85 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	103
FIGURA 86 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	103
FIGURA 87 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO. ....	103
FIGURA 88 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS..	104
FIGURA 89 - ORDEM APARENTE PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS. ....	104
FIGURA 90 - ORDEM EFETIVA PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	105
FIGURA 91 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	105

FIGURA 92 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	105
FIGURA 93 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO. ....	106
FIGURA 94 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN. ....	107
FIGURA 95 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA TEMPERATURA MÉDIA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO....	107
FIGURA 96 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS..	108
FIGURA 97 - ORDEM APARENTE PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS. ....	108
FIGURA 98 - ORDEM EFETIVA PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.....	108
FIGURA 99 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.....	109
FIGURA 100 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE. ....	109
FIGURA 101 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO. ....	110
FIGURA 102 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS. ....	111
FIGURA 103 - ORDEM APARENTE PARA VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.....	111
FIGURA 104 - ORDEM EFETIVA PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS. ....	111
FIGURA 105 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NO CONTORNO LESTE.....	112
FIGURA 106 - ORDENS APARENTE E EFETIVA PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NO CONTORNO LESTE.....	112
FIGURA 107 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO. ....	112
FIGURA 108 - CAMPO DE TEMPERATURAS ANALÍTICAS PARA O TRAPÉZIO.....	117
FIGURA 109 - CAMPO DE TEMPERATURAS NUMÉRICAS PARA O TRAPÉZIO. ....	117
FIGURA 110 - ISOTERMAS PARA O TRAPÉZIO.....	118
FIGURA 111 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA. ....	119
FIGURA 112 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA A TEMPERATURA MÉDIA. ....	119
FIGURA 113 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	120
FIGURA 114 - ORDEM EFETIVA (PE) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	121
FIGURA 115 - ORDEM APARENTE (PU) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	121
FIGURA 116 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA O FLUXO E A MÉDIA NO CONTORNO LESTE. ....	121
FIGURA 117 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NA MÉDIA DA TEMPERATURA E O FLUXO NO CONTORNO LESTE.....	122
FIGURA 118 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM VOLUMES FICTÍCIOS. ....	122
FIGURA 119 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	123
FIGURA 120 - ORDEM EFETIVA (PE) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	123
FIGURA 121 - ORDEM APARENTE (pU) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	123
FIGURA 122 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A MÉDIA E O FLUXO DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE. ....	124
FIGURA 123 - ORDENS APARENTE (PU) E EFETIVA (PE) BASEADAS NO FLUXO E MÉDIA DE TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE. ....	124



FIGURA 124 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM VOLUMES FICTÍCIOS. ....	125
FIGURA 126 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA. ....	126
FIGURA 127 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA. ....	126
FIGURA 128 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO. ....	127
FIGURA 129 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	127
FIGURA 130 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. .	128
FIGURA 131 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA O FLUXO E A MÉDIA NO CONTORNO LESTE. ....	128
FIGURA 132 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA O FLUXO E MÉDIA DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE. ....	128
FIGURA 133 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TÉCNICA DOS VOLUMES FICTÍCIOS COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN. ....	129
FIGURA 134 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	129
FIGURA 135 - ORDEM EFETIVA (PE) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO. ....	130
FIGURA 136 - ORDEM APARENTE (PU) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	130
FIGURA 137 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS VARIÁVEIS ICL E DCL. .	131
FIGURA 138 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NAS VARIÁVEIS ICL E DCL. ....	131
FIGURA 139 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADA COM A TÉCNICA DOS VOLUMES FICTÍCIOS COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN. ....	131
FIGURA 141 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA. .	133
FIGURA 142 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA A TEMPERATURA MÉDIA. ....	134
FIGURA 143 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO. ....	134
FIGURA 144 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	135
FIGURA 145 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. .	135
FIGURA 146 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL. ....	136
FIGURA 147 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL. ....	136
FIGURA 148 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUMES PARA DIRICHLET. ....	136
FIGURA 149 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	137
FIGURA 150 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO. ....	137
FIGURA 151 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. .	138
FIGURA 152 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL. ....	138
FIGURA 153 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL. ....	139
FIGURA 154 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUME COM DIRICHLET. ....	139
FIGURA 156 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA. .	140
FIGURA 157 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA A TEMPERATURA MÉDIA. ....	141
FIGURA 158 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS. ....	142
FIGURA 159 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO. ....	142

FIGURA 160 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.....	142
FIGURA 161 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA VARIÁVEIS ICL E DCL.....	143
FIGURA 162 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.....	143
FIGURA 163 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUMES COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.....	143
FIGURA 164 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.....	144
FIGURA 165 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS.....	144
FIGURA 166 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS.....	145
FIGURA 167 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS VARIÁVEIS ICL E DCL... ..	145
FIGURA 168 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.....	146
FIGURA 169 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO ANALÍTICAS APLICADAS COM A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUMES COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.....	146
FIGURA 171 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA TEMPERATURA MÉDIA.....	147
FIGURA 172 - ORDENS EFETICA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA DO DOMÍNIO.....	147
FIGURA 173 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.....	148
FIGURA 174 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS..	148
FIGURA 175 - ORDEM EFETICA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.....	149
FIGURA 176 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A MÉDIA DA TEMPERATURA E FLUXO NO CONTORNO LESTE.....	149
FIGURA 177 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NO FLUXO E NA MÉDIA DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE.....	150
FIGURA 178 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM A TÉCNICA DE VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.....	150
FIGURA 179 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS.....	151
FIGURA 180 - ORDEM EFETIVA (PE) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.....	151
FIGURA 181 - ORDEM APARENTE (PU) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.....	151
FIGURA 182 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA O FLUXO E A MÉDIA DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE.....	152
FIGURA 183 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA O FLUXO E A MÉDIA DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE.....	152
FIGURA 184 - CAMPO BASEADO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET.	153
FIGURA 186 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA... ..	154
FIGURA 187 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA.....	
FIGURA 188 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.....	155
FIGURA 189 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.....	155
FIGURA 190 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS..	155
FIGURA 191 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.....	156
FIGURA 192 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADO NAS VARIÁVEIS ICL E DCL.....	156
FIGURA 193 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.....	156
FIGURA 194 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.....	157

FIGURA 195 - ORDEM EFETIVA (PE) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.	157
FIGURA 196 - ORDEM APARENTE (PU) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.	158
FIGURA 197 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.	158
FIGURA 198 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.	159
FIGURA 199 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.	159

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIações

CDS – *Central Differencing Scheme*

CFD – *Computational Fluid Dynamics* (dinâmica dos fluidos computacional)

DDS – *Downstream Differencing Scheme*

Eq. - Equação

Fig. – figura

grad – gradiente

LENA – Laboratório de Experimentação Numérica

MDF – Método de Diferenças Finitas

MEF – Método dos Elementos Finitos

MVF – Método dos Volumes Finitos

Tab. - Tabela

p. – página

UDS – *Upwind Differencing Scheme*

v. – volume

## LISTA DE SÍMBOLOS E OPERADORES

$A$  – área de cálculo

$a_e$  – coeficiente leste do volume de controle principal

$a_{ne}$  – coeficiente nordeste do volume de controle principal

$a_n$  – coeficiente norte do volume de controle principal

$a_{nw}$  – coeficiente noroeste do volume de controle principal

$a_p$  – coeficiente do volume de controle principal



$a_s$  – coeficiente sul do volume de controle principal

$a_{se}$  – coeficiente sudeste do volume de controle principal

$a_{sw}$  – coeficiente sudoeste do volume de controle principal

$a_w$  – coeficiente oeste do volume de controle principal

$b_p$  – coeficiente do termo fonte do volume de controle principal

$dA$  – elemento de área

$E(\phi)$  – erro de discretização

$h$  - tamanho dos volumes da malha

$i$  – número do volume de controle da malha computacional

$J$  – Jacobiano da transformação

$L$  – comprimento do domínio de cálculo

$l_i$  – norma do resíduo

$N$  – número de volumes de controle

$P$  – volume de controle principal

$p_E$  – ordem efetiva do erro numérico

$p_L$  – ordem assintótica do erro numérico

$p_V$  – ordem verdadeira do erro numérica

$p_U$  – ordem aparente do erro numérica

$q$  – refino da malha computacional

$S^\emptyset$  - termo fonte para a variável genérica

$S$  – termo fonte para a equação de Poisson

$T$  – temperatura

$U$  – erro numérico estimado

$\vec{V}$  – vetor velocidade

$\vec{\nabla}$  - operador vetorial nabla

$\vec{\nabla} \phi$  – gradiente da propriedade

$\vec{\nabla} V$  – divergente da propriedade

## LETRAS GREGAS

$\alpha, \beta, \gamma$  – métricas de transformação

$\Gamma \phi$  – coeficiente de transporte da variável genérica

$\varepsilon_t$  – erro de truncamento

$\varepsilon_n$  – erro de iteração

$\varepsilon_\pi$  – erro de arredondamento

$\varepsilon_p$  – erro de programação

$\Sigma$  – somatório dos volumes de controle

$\rho$  – massa específica da propriedade

$\phi$  – solução numérica

$\Phi_\infty$  - solução analítica da variável de interesse

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>22</b>
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	23
1.2	DEFINIÇÃO E RELEVÂNCIA DO PROBLEMA.....	24
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO.....	27
1.4	DELINEAMENTO DA DISSERTAÇÃO.....	28
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>29</b>
2.1	MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS .....	29
2.2	MALHAS.....	32
2.2.1	Malhas Estruturadas Não Ortogonais.....	34
2.3	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS.....	35
2.4	GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS CURVÍLINEAS.....	36
2.4.1	Método Utilizando Equações Diferenciais Elípticas.....	36
2.4.2	Método Utilizando Interpolação De Lagrange .....	38
2.5	REFINO DA MALHA COMPUTACIONAL .....	38
2.6	INTEGRAÇÃO PELA REGRA DO RETÂNGULO .....	39
2.7	CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	41
2.8	FORMAS DE APLICAR CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	41
2.8.1	Volumes fictícios .....	41
2.8.2	Volumes de espessura zero .....	42
2.8.3	Balanço para os volumes de fronteira .....	43
2.9	FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO .....	44
2.9.1	Esquema CDS ( <i>central-difference scheme</i> ) e DDS ( <i>Dowstream Differencing Scheme</i> ) .....	45
2.10	GAUSS-SEIDEL .....	47
2.11	VERIFICAÇÃO .....	47
2.11.1	Fontes de erros numéricos.....	48

2.11.2 Estimativas de erro <i>a priori</i> .....	51
2.11.3 Estimativas de erro <i>a posteriori</i> .....	52
2.11.4 Ordens efetiva e aparente .....	52
<b>3 PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>55</b>
3.1 MODELO MATEMÁTICO .....	55
3.1.1 Equação de Poisson.....	56
3.2.1 Transformação De Coordenadas .....	58
3.2.2 Discretização da equação governante .....	63
3.3 ANÁLISE <i>A PRIORI</i> DA ORDEM DO ERRO NUMÉRICO .....	67
3.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	68
<b>4 RESULTADOS A RESPEITO DA GEOMETRIA EM L.....</b>	<b>70</b>
4.2.2 Condição de contorno de Neumann.....	78
4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM BALANÇO DE VOLUMES.....	85
4.2.1 Condição de contorno de Dirichlet .....	85
4.2.2 Condição de contorno de Neumann.....	92
4.3.2 Condição de contorno de Neumann.....	106
4.4 COMPARAÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O L .....	113
<b>5 RESULTADOS A RESPEITO DO TRAPÉZIO.....</b>	<b>117</b>
5.1.2 Condição de contorno de Neumann.....	125
5.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM BALANÇO DE VOLUMES.....	132
4.2.1 Condição de contorno de Dirichlet .....	132
5.2.2 Condição de contorno de Neumann.....	139
5.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO .....	146
5.3.1 Condição de contorno de Dirichlet .....	146



5.3.2	Condição de contorno de Neumann .....	153
5.4	COMPARAÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O TRAPÉZIO .....	159
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>163</b>
6.1	CONSTATAÇÕES GERAIS .....	163
6.2	CONTRIBUIÇÕES.....	165
6.3	TRABALHOS FUTUROS .....	165
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>167</b>
	<b>APÊNDICE A . Obtenção Das Estimativas De Erros <i>A Priori</i>.....</b>	<b>171</b>
	<b>APÊNDICE B . Coeficientes e termos fontes da equação governante ....</b>	<b>174</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o grande desenvolvimento dos computadores tem possibilitado resolver problemas da engenharia envolvendo a dinâmica dos fluidos computacional para resolver problemas complexos, e também, utilizando geometrias complexas. Com isso, há uma crescente necessidade de novas abordagens e metodologias.

Existem três métodos utilizados para tratar de processos envolvendo transferência de calor e mecânica dos fluidos, sendo eles: experimental, analítico e numérico (PATAKAR, 1980; TANNEHILL, ANDERSON e PLETCHER, 1997).

As investigações experimentais envolvem trabalhar com os problemas em escala real ou testados em laboratórios, e assim conseguem prever como estes se comportam nas mesmas condições reais aproximadas (PATANKAR, 1980). Um exemplo de método experimental é o túnel de vento. Como vantagem, pode-se apontar o fato de tratar com confiança o modelo real (MALISKA, 2013). Porém, como desvantagem pode-se apontar o alto custo operacional (TANNEHILL, ANDERSON e PLETCHER, 1997), além de equipamentos exigidos e erros experimentais.

Nas abordagens analíticas, fazem-se simplificações nas hipóteses do problema com o intuito de torná-lo tratável, e assim se examinam as consequências de um modelo matemático, ao invés do problema físico (PATAKAR, 1980; TANNEHILL, ANDERSON e PLETCHER, 1997). Como vantagens desse método pode-se apontar seu baixo custo, além de representarem o modelo real através de um modelo matemático. Já como desvantagens: as hipóteses para simplificações do modelo podem afastar o modelo matemático do fenômeno físico (PATANKAR, 1980), restrição de geometria para cálculo, erros de modelagem e problemas simples.

E por fim, os computadores têm facilitado a aplicação dos métodos numéricos, os quais possibilitam a resolução de problemas de engenharia mais complexos (MALISKA, 2013). Deste modo, em comparação aos outros métodos, a experimentação numérica é livre de algumas limitações impostas pelos métodos experimentais e analíticos, e isso representa uma grande vantagem (TANNEHILL, ANDERSON e PLETCHER, 1997). Além disso, possibilitam a

solução de problemas não-lineares, geometrias complexas, condições de contornos variáveis, entre outros. Como desvantagens do método numérico pode-se destacar, por exemplo, erros de modelagem do problema, e erros numéricos, os quais são classificados em quatro tipos: erros de truncamento, erros de iteração, erros de arredondamento e erros de programação (FERZIGER e PERIC, 2002; MARCHI e SILVA, 2002).

## 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dinâmica dos fluidos computacional ou CFD (em inglês para *Computational Fluid Dynamics*) é definido por Versteeg e Malalasekera (2007) como o estudo de sistemas envolvendo escoamento de fluidos, transferência de calor e fenômenos associados através de simulação computacional. E foi a partir de 1960 que as técnicas do CFD no projeto, pesquisa e desenvolvimento e fabricação de aeronaves e motores a jato passaram a ser integradas pela indústria (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Em 1972, o método dos volumes finitos (MVF) começou a ser difundido com um artigo publicado por Patankar e Spalding, em que ainda era tratado como um método de diferenças finitas com uma formulação através de volumes de controle (MUNIZ, 1995). Também, até a década de 1970 pouco havia se estudado sobre geometrias irregulares. Foi então que no início da mesma década que um grupo de pesquisadores do MDF começou a utilizar coordenadas curvilíneas para o tratamento de escoamento de fluidos em geometrias complexas (MALISKA, 2013). E só em 1977 o grande marco no desenvolvimento nos experimentos utilizando coordenadas generalizadas foi apresentado por Thompson *et al* (1977), que aplicaram a metodologia através de diferenças finitas em problemas de aerodinâmica bidimensional (MALISKA, 2013).

A partir disso, vários estudos têm sido desenvolvidos utilizando o MVF com as coordenadas curvilíneas em CFD para obtenção de soluções numéricas cada vez mais acuradas. É importante também saber realizar uma boa implementação das condições de contorno, já que estas frequentemente contribuem com uma significativa fonte de erro. Desta forma, estudos para verificação de erros com esses parâmetros para análise da implementação de condições de contorno têm sido feito nos últimos anos.

Investigações sobre comportamento da ordem do erro de discretização têm sido desenvolvidas para confiabilidade da solução, que é o foco deste trabalho. Em 2004, Repin, Sauter e Smolianski apresentaram em seu trabalho uma técnica de estimador de erro *a posteriori* para medir a distribuição de erro local utilizando uma combinação das condições de contorno de Dirichlet e Neumann com a equação de Poisson. Também, Zhu, Shimizu e Nishimoto (2004) propuseram o uso de malhas não ortogonais para simular fluxos em rios e realizar a comparação dos resultados utilizando malhas ortogonais.

Somente em 2005 e 2006, Schneider e Marchi apresentam um estudo do comportamento da ordem do erro de discretização para o MVF utilizando algumas soluções numéricas com refino de malha. Além disso, tem-se dedicado um grande esforço da pesquisa na aplicação do MVF para resolver problemas em malhas não estruturadas, e também, tem-se resolvido problemas fortemente advectivos em geometrias arbitrárias (MALISKA, 2013).

Nesta busca para analisar a ordem do erro de discretização envolvendo malhas não ortogonais com o MVF em CFD pode-se destacar alguns trabalhos, por exemplo, Rühaak *et al* (2008) foi utilizado malhas não ortogonais com transformação do plano para modelar fluxo subterrâneo de água utilizando Fortran. Folkner, Katz e Sankaran (2014) desenvolveram em seu trabalho uma estrutura geral para implementação e verificação de condições de contorno complexas com o MVF. E mais recentemente, Noriega *et al* (2017) apresentam maneiras de atingir a ordem de convergência desejada através da equação de Poisson com condições de contorno de Dirichlet e Neumann utilizando malhas não ortogonais. Foi observado neste mesmo trabalho que malhas não ortogonais apresentam redução de segunda ordem teórica para primeira ordem.

Portanto, fica evidente a necessidade do estudo da ordem do erro de discretização em CFD, o que visa maior confiabilidade das soluções obtidas para garantir a aplicabilidade nos problemas de engenharia. Com isso, são apresentadas nas próximas seções as definições e objetivos deste trabalho.

## 1.2 DEFINIÇÃO E RELEVÂNCIA DO PROBLEMA

Com o objetivo de resolver os problemas envolvendo a dinâmica dos fluidos computacional com os métodos numéricos, técnicas de discretização

foram desenvolvidas para serem aplicadas nas equações diferenciais que representam o modelo matemático. Alguns exemplos que podem ser citados: método dos elementos finitos (MEF), método dos volumes finitos (MVF) e método das diferenças finitas (MDF). Para o desenvolvimento dessa dissertação foi utilizado o método dos volumes finitos (MVF).

Além disso, os métodos numéricos utilizados para abordar problemas em dinâmica dos fluidos computacional envolvem equações diferenciais parciais, bem como condições de contorno e, dependendo do problema, condições iniciais. O processo de discretização inclui, também, a representação computacional da geometria, que segundo Maliska (2013) constitui uma das dificuldades do procedimento. Isto ocorre principalmente devido a geometria envolvida em muitos problemas práticos apresenta contornos irregulares, o que pode dificultar também a implementação de condições de contorno. Assim, para melhor implementação e solução dos problemas utilizando geometrias com contornos irregulares, em 1970 pesquisadores começaram a utilizar coordenadas curvilíneas generalizadas para discretizar a geometria para cálculo. Atualmente, coordenadas generalizadas dão origem a malhas estruturadas, são largamente empregadas e já existem nos códigos computacionais comerciais mais importantes (MALISKA, 2013).

Os domínios de cálculos utilizados para o estudo foram duas geometrias bidimensionais, em formato de L e trapézio. A geometria em formato de L representa uma seção de um duto, é escolhida para estudo por muitos pesquisadores. Por exemplo, Oosterlee *et al.* (1993) estudou L as equações de Navier-Stokes em escoamento incompressível e estacionário utilizando o método dos volumes finitos discretizado para malhas curvilíneas através de um algoritmo não linear *multigrid*; também, Andrade (2014) estudou em uma cavidade em L, fluido compressível em regimes forçados e naturais discretizado através do método dos volumes finitos utilizando malhas estruturadas e não estruturada; entre outros.

Além disso, o trapézio foi escolhido pela simetria com a geometria em formato de L, além de ser sua metade, também é parte da mesma seção de um duto. Para análise, foi aplicada a equação de Poisson, a qual é uma consequência da equação de Navier-Stokes e da equação de continuidade, e representa o fenômeno de difusão em ambas geometrias estudadas.

O método numérico escolhido foi o método dos volumes finitos (MVF), o qual traz ao menos três tipos de aplicação das condições de contorno, podendo-se destacar (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2013): uso de volumes fictícios, balanço de volumes na fronteira e uso de volume de espessura zero. Um procedimento para aplicação de condição de contorno inconveniente, acarreta obstáculos na veracidade da solução do problema (MALISKA, 2013). Então foram aplicadas essas técnicas com as condições de contorno de Dirichlet e Neumann.

Com a obtenção da solução numérica, também surgem os erros que são causados pelas aproximações numéricas ao modelo matemático. Os principais meios para avaliar a acurácia e confiabilidade da solução numérica (MARCHI e SILVA, 1999) são os processos de verificação e validação (AIAA, 1998; ROACHE, 2004). Desta forma, no presente trabalho foram feitas verificações nas formas de aplicar as condições de contorno.

Giacomini (2009) analisou em seu trabalho o comportamento das diferentes formas de aplicação de condição de contorno do tipo Dirichlet na equação de Poisson unidimensional aplicada a malhas uniformes. No presente trabalho serão estudadas as mesmas diferentes formas de aplicação de condição de contorno dos tipos Dirichlet e Neumann. Porém, aplicadas a duas geometrias bidimensionais utilizando malhas não ortogonais estruturadas, na equação de Poisson, a qual é de derivadas parciais e tem grande aplicação em engenharia mecânica, física teórica e eletrostática. A equação de Poisson modela tanto fenômenos de transferência de calor como também de escoamentos, como por exemplo, escoamentos potenciais.

Então, com o avanço tecnológico e a necessidade de implementação utilizando geometrias complexas surge a necessidade de analisar o comportamento dessas formas de aplicar as condições de contorno em coordenadas curvilíneas generalizadas; pois, sabendo que as soluções numéricas possuem erros, é importante estimá-los. Segundo Marchi (2001), uma simples apresentação de gráficos com modelos numéricos diferentes que tem como objetivo comparar seus desempenhos sem as respectivas incertezas, pode levar a conclusões equivocadas, e o que se deve fazer é comparar os valores das estimativas de erro. Tudo isso motiva e justifica o estudo da aplicação das formas de condição de contornos em coordenadas curvilíneas.



No presente trabalho, a verificação é realizada para as soluções numéricas envolvendo as três formas de aplicação de condições de contorno, sendo considerada somente o erro de discretização. E as estimativas de erros são feitas: *a priori*, sendo elas as ordens assintótica ( $p_L$ ) e verdadeiras ( $p_V$ ); *a posteriori*, sendo elas a ordem efetiva ( $p_E$ ) e aparente ( $p_U$ ); e a magnitude do erro de discretização ( $E$ ).

### 1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo geral deste trabalho é verificar *a priori* e *a posteriori* através das ordens dos erros, os efeitos das três diferentes técnicas de aplicar as condições de contorno, empregando o método dos volumes finitos em problemas bidimensionais utilizando malhas estruturadas não ortogonais na equação de Poisson.

Os objetivos específicos são:

- realizar a discretização e transformação de coordenadas para duas geometrias no formato de L e de trapézio, utilizando malhas estruturadas não ortogonais;
- deduzir *a priori* as ordens verdadeiras e assintótica do erro de discretização para as variáveis de interesse;
- aplicar as técnicas de aplicação das condições de contorno na equação de Poisson para as duas geometrias com malhas estruturadas não ortogonais geradas através de interpolação de Lagrange e equações diferenciais elípticas;
- verificar a tendência do erro de discretização em função do número de volumes de controle;
- verificar *a posteriori* as ordens verdadeiras e assintótica do erro de discretização para as variáveis de interesse, utilizando as ordens efetiva e aparente;
- comparar os erros de discretização baseados nas variáveis de interesse, além das ordens dos erros entre as formas de aplicar condições de contorno.

## 1.4 DELINEAMENTO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação consta de capítulos e referências apresentados da seguinte forma:

- O primeiro capítulo apresenta a introdução do trabalho, revisão bibliográfica, descreve a definição do problema; a motivação do trabalho a ser realizado; o objetivo geral e os específicos e a estrutura geral do projeto.
- O segundo capítulo aborda a fundamentação teórica, descreve a discretização utilizada realizar o trabalho; os tipos de malhas; a forma de aplicação dos volumes finitos; os tipos de condições de contorno, bem como suas aplicações; as funções de interpolação; os métodos de solução computacional; a verificação utilizada, bem como as ordens efetivas e aparentes, contendo as fontes de erros numéricos e suas estimativas.
- O terceiro capítulo envolve os procedimentos analíticos e numéricos, descreve a metodologia usada para a realização do trabalho: o modelo matemático; o modelo numérico: a discretização; a transformação do plano; as técnicas utilizadas para gerar as malhas, através de interpolação de Lagrange e equações elípticas; as estimativas *a priori*; e também, as variáveis de interesse estudadas para o presente trabalho.
- O quarto capítulo envolve os resultados a respeito da geometria em L através das três técnicas de aplicação de condições de contorno utilizadas, aplicando condições de contorno de Dirichlet e Neumann.
- O quinto capítulo trata os resultados a respeito da geometria do trapézio para as três técnicas de aplicação de condições de contorno utilizadas, aplicando condições de contorno de Dirichlet e Neumann.
- O sexto capítulo aborda as conclusões finais, bem como constatações, contribuições e sugestões de trabalhos futuros.
- Por fim, tem-se as referências, e em seguida o Apêndice A que traz as demonstrações das estimativas *a priori* através da expansão da série de Taylor; o Apêndice B onde constam as discretizações para as três técnicas de aplicação das condições de contorno, sendo elas: com volumes fictícios, sem volumes fictícios (balanço de volumes na fronteira) e volumes de espessura zero, bem como seus coeficientes obtidos.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são abordados conceitos e definições necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Ou seja, são definidos nessa seção: o método numérico utilizado para resolver a equação diferencial, ou seja, o MVF; também traz os passos necessários para a discretização da geometria; e também a discretização de uma equação. Os tipos de malhas utilizadas, com foco na malha estruturada não ortogonal, e também as duas técnicas para gerar as malhas: interpolação de Lagrange e equações diferenciais elípticas. Além disso, a transformação de coordenadas para utilizar essa malha. Também, são apresentados e explicados os tipos e as técnicas de aplicação de condições de contorno, de maneira que no presente estudo utilizam-se as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, com três técnicas de aplicação: método dos volumes fictícios, balanço na fronteira e volume de espessura zero. Também tem-se as aproximações numéricas utilizadas, assim como o método indireto para solução do sistema algébrico Gauss-Seidel. A última seção aborda a verificação da solução, os conceitos de erro, e principalmente as fontes de erros numéricos, estimativas *a priori* e *a posteriori* para calcular a magnitude do erro, e por fim, as ordens efetivas e aparente.

### 2.1 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

Segundo Patankar (1980), a formulação de volumes de controle pode ser considerada uma versão especial do método dos resíduos ponderados descrito em 1972 por Finlayson, e consiste em resolver equações diferenciais. Moukalled, Mangani e Darwish (2016) definem o MVF como sendo uma técnica que transforma a equação diferencial parcial governante em pequenos e finitos volumes de controle representados por equações algébricas discretas, onde o domínio é dividido em um número não sobreposto de volumes de controle, em que a equação é integrada sobre cada um (PATANKAR, 1980).

O MVF aplica os princípios de conservação na forma de integral nessas regiões do domínio. Esses pequenos volumes de controle definem seus limites na malha através de faces, não nós (FERZIGER e PERIC, 2002). A popularidade

do MVF em CFD se dá pela alta flexibilidade que este oferece como um método de discretização (MOUKALLED, MANGANI e DARWISH, 2016).

Para exemplificar matematicamente o MVF, considera-se uma equação de conservação genérica em regime permanente, representada por

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \phi) + S^{\phi} \quad (2.1)$$

sendo  $\phi$  a variável genérica,  $\rho$  e  $\Gamma$  são referentes à massa específica e o coeficiente de transporte, respectivamente. O lado esquerdo da igualdade representa a advecção e o lado direito representa a difusão da propriedade  $\phi$ ,  $\vec{V}$  é o vetor velocidade, e  $S^{\phi}$  é o termo fonte. O operador  $\vec{\nabla}$  indica o gradiente da variável  $\phi$  quando  $\vec{V} \phi$ , e o divergente quando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ .

A solução numérica de um problema através do MVF considera os seguintes passos apresentados a seguir.

### **1º passo - Geometria e modelo físico**

Segundo Moukalled, Mangani e Darwish (2016), formular matematicamente um fenômeno físico significa entendê-lo, e sua formulação deve ser testada e validada. Desta forma, o primeiro passo é a escolha do modelo matemático que represente o fenômeno físico, suas condições de contorno e iniciais, forma de aplicação de condições de contorno, propriedades dos materiais e geometria de cálculo.

### **2º passo - Discretização do domínio**

A discretização do domínio de cálculo constitui na geração da malha sobre a geometria estudada, ou seja, divide em células ou elementos discretos não sobrepostos que completam totalmente o domínio de cálculo, onde a equação de conservação será solucionada (MOUKALLED, MANGANI e DARWISH, 2016). O conjunto de células ou elementos sobre o domínio discretizado recebe o nome de malha (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007), e resultam desse processo de discretização do domínio. A divisão ocorre através



limites desses volumes são delimitados por suas faces, que são denominadas  $w$  para a face entre o ponto  $P$  e o ponto  $W$ , e  $e$  para a face entre os pontos  $P$  e  $E$ . No caso da malha bidimensional, o ponto  $P$  também possui como seus vizinhos os pontos  $N$  (norte, e do inglês *North*), e o ponto  $S$  (sul, e do inglês *South*), com suas faces delimitadas por  $n$  e  $s$ , respectivamente. Ademais, seus lados possuem tamanhos  $(\Delta x, \Delta y, 1) \rightarrow (x, y, z)$  (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Após realizadas as integrações são aplicadas funções de interpolação para aproximar os termos da solução da integral (PATANKAR, 1980), exemplificadas mais adiante, e para cada volume do domínio há a expressão algébrica para cada propriedade  $\phi$  representada por

$$\begin{aligned} a_p \phi_P = & a_e \phi_E + a_w \phi_W + a_n \phi_N + a_s \phi_S + a_{ne} \phi_{NE} + a_{se} \phi_{SE} \\ & + a_{sw} \phi_{SW} + a_{nw} \phi_{NW} + b_P \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde o termo ao lado esquerdo indica o coeficiente da propriedade  $\phi$  no centro do volume principal, enquanto ao lado direito são os coeficientes da propriedade nos volumes vizinhos e adjacentes aos vizinhos, e  $b_P$  é o termo fonte.

#### 4º passo - Solução das equações discretizadas

O último passo é obter a solução numérica resolvendo o sistema de equações algébricas (Eq. 2.2) através de um *solver*, que são técnicas computacionais para resolução dos sistemas. Essas técnicas independem do processo de discretização (MOUKALLED, MANGANI e DARWISH, 2016), e podem ser diretas, como o TDMA; ou indiretas, como o Gauss-Seidel, e serão melhor exemplificadas mais adiante.

## 2.2 MALHAS

Um dos primeiros passos de um processo de discretização é a escolha e construção da malha, sendo que a malha bem construída melhora a qualidade da solução, enquanto a malha mal construída é a maior fonte de contribuição para um resultado ruim (TANNEHILL, ANDERSON e PLETCHER, 1997). Como



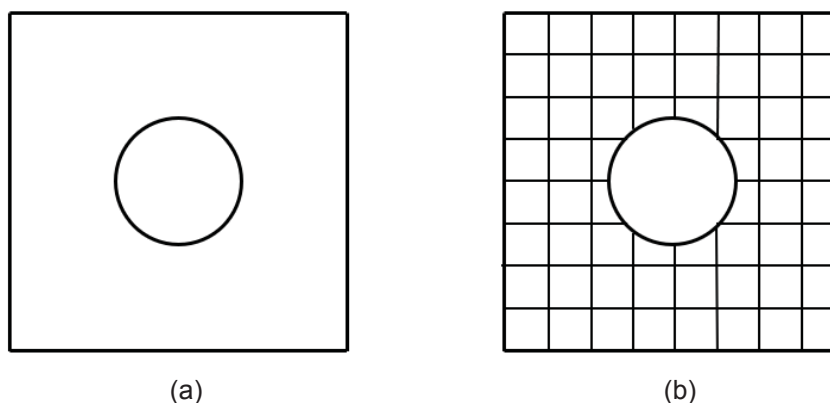
por exemplo, a falta de convergência para um certo nível desejado, normalmente é resultado da baixa qualidade da malha.

Para melhor exemplificar os tipos de malha, considera-se a geometria que contém um orifício (FIGURA 2 (a)), e a partir deste exemplo, observa-se que são comumente utilizados três tipos de malhas: malhas estruturadas ortogonais, malhas estruturadas não ortogonais e malhas não estruturadas.

A Fig. 2 (b) mostra a discretização com a malha estruturada ortogonal, e como pode ser observado na fronteira interna ao orifício esse tipo de malha não é aconselhável devido à falta de adaptabilidade à geometria. Na Fig. 3 (a), a discretização com coordenadas generalizadas é preferível, e por fim, na Fig. 3 (b), a discretização utilizando malhas não estruturadas.

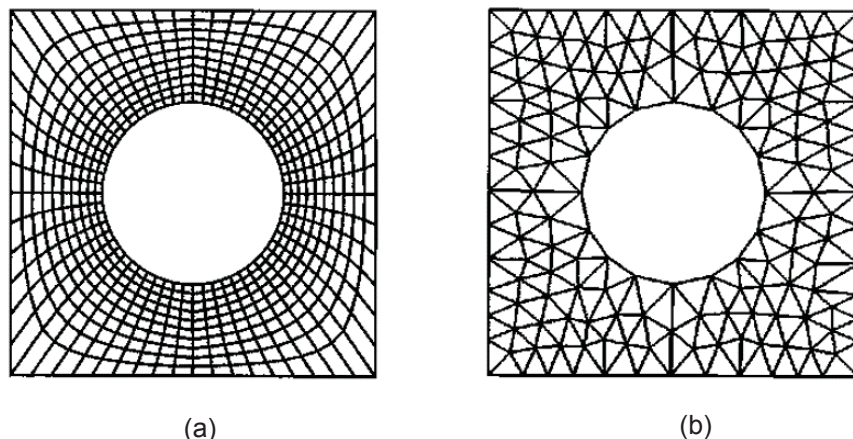
Na Fig. 3 os sistemas de coordenadas escolhidos não possuem volumes fracionados nas fronteiras que são adequadas para domínios irregulares, ou seja, coordenadas coincidentes com a fronteira do domínio, também conhecidos como *boundary-fitted coordinates* (MALISKA, 2013). Existem vantagens e desvantagens na escolha da aplicação para cada tipo de malha, então se faz necessário analisar a natureza do problema a ser estudado para definição de qual será a opção mais adequada. Para o presente trabalho, malhas estruturadas não ortogonais são utilizadas.

FIGURA 2 - a) REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA QUE CONTÉM UM ORIFÍCIO; b) GEOMETRIA DISCRETIZADA COM A MALHA ESTRUTURADA ORTOGONAL.



FONTE: Adaptado de Maliska (2013).

FIGURA 3 - a) DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO MALHAS ESTRUTURADAS NÃO ORTOGONAIS; b) COM MALHAS NÃO ESTRUTURADAS.



FONTE: Maliska (2013).

### 2.2.1 Malhas Estruturadas Não Ortogonais

As malhas resultantes da discretização estruturadas não ortogonais (FIGURA 3 (a)) são análogas em termos gerais às estruturadas ortogonais em sua definição. Ou seja, cada volume interno tem sempre o mesmo número de vizinhos (MALISKA, 2013), onde seus volumes não são sobrepostos, cruzam-se somente uma vez, e em um plano bidimensional cada volume possui quatro vizinhos (FERZIGER e PERIC, 2002). Atualmente, são largamente utilizadas, e estão presentes em quase todos os programas computacionais comerciais importantes.

As malhas estruturadas não ortogonais são frequentemente utilizadas em geometrias complexas e possuem como vantagem a sua fácil adaptabilidade, considerando que suas linhas se adaptam aos contornos e as condições de contorno são mais fáceis de serem implementadas. Já como desvantagem da malha estruturada não ortogonal, há necessidade de realização de transformação de coordenadas, onde pode ser citado que as equações transformadas possuem mais termos, o que dificulta a programação e aumenta o tempo computacional (FERZIGER e PERIC, 2002).

### 2.3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Ao trabalhar com geometrias complexas utilizando malhas estruturadas não ortogonais surge a necessidade de fazer uso de relações geométricas entre o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas generalizadas. Ou seja, realizar a transformação de coordenadas do plano físico para o plano computacional. Patankar (1980) aponta como vantagem de coordenadas transformadas a possibilidade de menos variáveis independentes.

Considere-se, por exemplo, a Fig. 4 (a) que possui como plano transformado computacional representado na Fig. 4 (b), onde as linhas da geometria serão denominadas em  $x$  e  $y$ , e em seguida, representadas em referencial  $(\xi, \eta)$ , que será disposto como em eixo cartesiano. Assim,  $\xi$  e  $\eta$  são funções de  $(x, y)$  na forma  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ , e deve existir uma relação de um para um entre os pontos especificados por  $(x, y)$  e  $(\xi, \eta)$  (TANNEHILL, ANDERSON e PLETCHER, 1997). Desta forma, o plano físico e suas informações são transmitidos ao código computacional através das métricas de transformação  $\xi = \xi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$ ,  $\gamma = \gamma(x, y, z)$ , as quais aparecem na equação de conservação transformada (MALISKA, 2013).

Para exemplificar, considera-se o ponto 1 na Fig. 4 (a), seu ponto correspondente

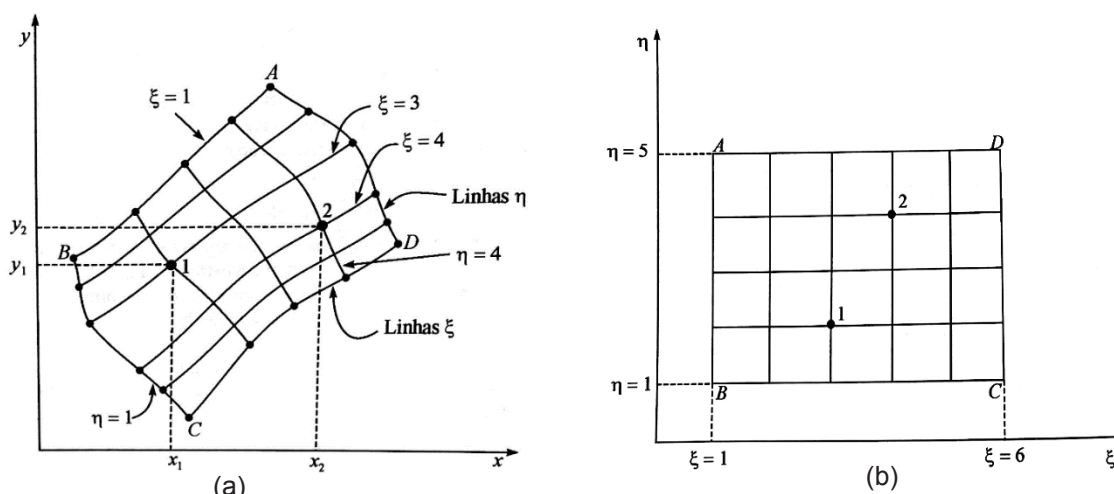
$$\begin{aligned}(\xi, \eta) &= (3, 2) \\(x, y) &= (x_1, y_1)\end{aligned}\tag{2.3}$$

e para o ponto 2

$$\begin{aligned}(\xi, \eta) &= (4, 4) \\(x, y) &= (x_2, y_2)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Ainda segundo Maliska (2013), para facilitar a programação do algoritmo, é comum haver espaçamentos arbitrários no plano físico, e já no plano transformado se empregar  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ .

FIGURA 4 – (a) PLANO FÍSICO COM MALHA ESTRUTURADA NÃO ORTOGONAL; (b) CORRESPONDÊNCIA DOS PONTOS 1 E 2 NO PLANO COMPUTACIONAL.



FONTE: Maliska (2013).

## 2.4 GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS CURVÍLINEAS

As coordenadas que dão origem às malhas estruturadas são as chamadas curvilíneas generalizadas (MALISKA, 2013), e segundo Patankar (1980), se a malha é conveniente e economicamente de ser construída através de coordenadas curvilíneas, então este é um método viável para lidar com geometrias irregulares. A geração de malha é a tarefa mais complexa do processo de simulação numérica pois, uma malha bem gerada respeita as características da geometria, bem como as concentrações de volumes onde o problema físico requer para melhor análise.

Os métodos encontrados na literatura para geração de malhas são classificados em diferenciais e algébricos. Os diferenciais são aqueles que empregam sistemas de equações diferenciais, sendo mais gerais, mas também exigindo maior tempo computacional e elaboração matemática; enquanto os algébricos são aqueles que empregam diferentes interpolações, são bastante versáteis e rápidos (MALISKA, 2013), e os mesmos serão exemplificados a seguir.

### 2.4.1 Método Utilizando Equações Diferenciais Elípticas

O uso de equações elípticas para geração de malhas foi inicialmente aplicado nos trabalhos de Winslow (1966) e Thompson et al. (1977), e tem como

motivação que esses sistemas garantem que o jacobiano da transformação não se anule no domínio (MALISKA, 2013). Isto ocorre por apresentarem soluções harmônicas, e assim observam o princípio de o máximo e mínimo valor ocorrerem na fronteira; também garantem a unicidade das funções, onde duas superfícies coordenadas de mesmo valor nunca se interceptarão.

Para melhor exemplificar, considera-se que as equações geradoras de malha são de Poisson, onde o mapeamento ocorre a partir da delimitação dos contornos do plano físico e o interior é determinado através da solução das equações (TANNEHILL, ANDERSON E PLETCHER, 1997)

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta) \quad (2.5)$$

$$\nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta) \quad (2.6)$$

onde  $(\xi, \eta)$  representam as coordenadas no domínio computacional, e  $P$  e  $Q$  são os termos que controlam o espaçamento no interior do domínio e podem ser usadas diversas expressões.

Para obter a malha deve-se então resolver as equações (2.5) e (2.6), e segundo Maliska (2013), a maneira altamente difundida é resolver as equações geradoras do sistema coordenado no sistema de coordenadas curvilíneas. O que leva a um sistema de duas equações elípticas

$$\alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta x_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right)(P x_\xi + Q x_\eta) = 0 \quad (2.7)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} - 2\beta y_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right)(P y_\xi + Q y_\eta) = 0 \quad (2.8)$$

onde

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (2.9)$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (2.10)$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad (2.11)$$

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (2.12)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os componentes do tensor métrico associado à transformação, e  $J$  é o Jacobiano da transformação.

Por fim, algumas vantagens no uso de equações elípticas para geração de malhas são, por exemplo, geometrias complexas são facilmente tratadas, a transformação é um para um e a malha resultante é suave. Como desvantagem da sua aplicação, é possível citar a dificuldade em especificar  $P$  e  $Q$ , contornos podem mudar com o tempo e controle dos pontos da malha no interior são difíceis de alcançar (TANNEHILL, ANDERSON E PLETCHER, 1997).

#### 2.4.2 Método Utilizando Interpolação De Lagrange

De acordo com Maliska (2013), os métodos algébricos de geração de coordenadas são bastante poderosos e altamente empregados, devido às suas vantagens, simplicidade e baixo tempo computacional necessário. Um desses métodos é a interpolação de Lagrange, o qual permite que interpolações de qualquer ordem possam ser realizadas em uma estrutura de fácil implementação computacional (MALISKA, 2013).

O polinômio de interpolação genérico é dado por

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{n=1}^N \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) \mathbf{r}_n \quad (2.13)$$

sendo  $\mathbf{r}(\xi)$  os vetores posições dos pontos interpolados pertencentes a uma mesma linha  $\xi$ ,  $\mathbf{r}_n$  os pontos fornecidos por onde passará o polinômio,  $I$  o número de linhas coordenadas que interceptam essa linha  $\xi$  e  $N$  a ordem do polinômio.

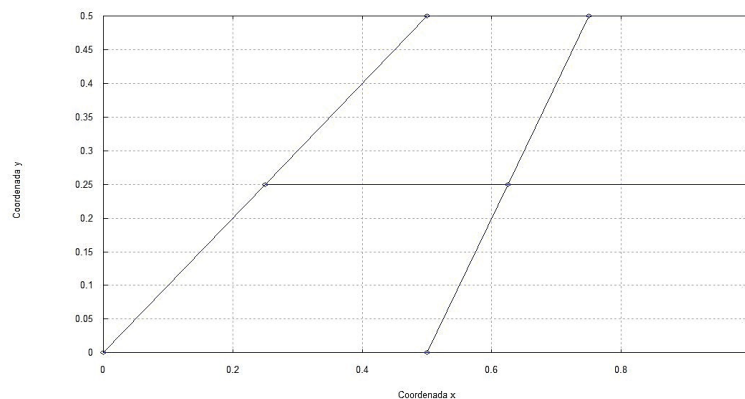
#### 2.5 REFINO DA MALHA COMPUTACIONAL

O refino da malha computacional pode ser feita de diversas maneiras, utilizando o método dos volumes finitos. Schneider (2007) estudou o efeito de diversos tipos de refino de malha sobre a ordem do erro de discretização. Para o presente trabalho foi utilizado refino uniforme.



No refino uniforme, os volumes da malha grossa são divididos em partes iguais para originar a malha fina (SCHNEIDER, 2007). Considerando então, por exemplo com o trapézio, uma malha grossa sendo seus volumes  $2 \times 2$ , na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente (FIGURA 5).

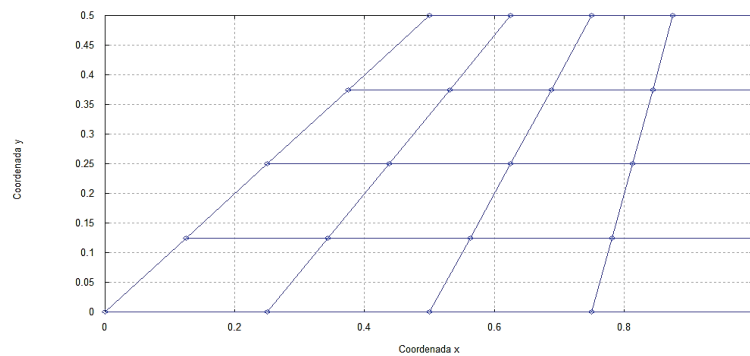
FIGURA 5 - TRAPÉZIO COM UMA MALHA GROSSA DE  $2 \times 2$  VOLUMES.



FONTE: O autor (2019).

Realizando o refino uniforme, a malha seguinte fica com  $4 \times 4$  por volumes (FIGURA 6). E assim, a razão de refino utilizada é  $q = 2$ .

FIGURA 6 - MALHA DE  $4 \times 4$  VOLUMES APÓS O REFINO UNIFORME.

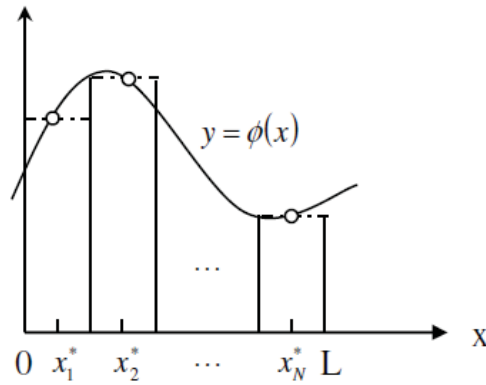


FONTE: O autor (2019).

## 2.6 INTEGRAÇÃO PELA REGRA DO RETÂNGULO

Segundo Kreyszig (1999), a fórmula da integração integra a função  $f(x)$  no intervalo  $0 \leq x \leq N$ , onde  $N$  pode ser dividido em finitos subintervalos de qualquer comprimento, e a regra do retângulo possui erro de ordem 2. Assim, a Fig. 7 mostra cada subintervalo aproximado de  $\phi$  pela variável  $\phi(x_i^*)$ .

FIGURA 7 - REPRESENTAÇÃO DA REGRA DO RETÂNGULO.



FONTE: Giacomini (2009).

Cada retângulo tem sua área representada por  $\phi(x_i^*)\Delta x, \dots$ . Desta forma, considerando a integral dada pela regra do retângulo para um único contorno leste, é dado por

$$\overline{T_{CL}} = \frac{1}{L} \int_0^L T(y) dy \quad (2.14)$$

onde  $L$  é o comprimento de onde se está realizando a integração.

Ademais, a integral pela regra do retângulo para os volumes internos para a malha estruturada não ortogonal, é dada por

$$\overline{T_{2D}} = \frac{1}{A} \int_A T(x, y) dA \approx \frac{1}{A} \sum_P T_P \Delta A_P \quad (2.15)$$

onde  $A$  é a área, e sendo  $\Delta A_P$  dado por

$$\Delta A_P = \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{|J_P|} \quad (2.16)$$

sendo  $J_P$  o Jacobiano da transformação, então

$$A = \sum_P \Delta A_P = \sum_P \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{|J_P|} = \Delta \xi \Delta \eta \sum_P \left( \frac{1}{|J_P|} \right) \quad (2.17)$$

## 2.7 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Tendo em vista a Eq. (2.2), que representa a equação aproximada para o volume de controle genérico ( $P$ ), após realizadas as aproximações numéricas, a solução satisfaz somente os volumes internos do domínio, mas não para aqueles adjacentes aos contornos (PATANKAR, 1980). Isto ocorre porque há necessidade de um tratamento diferente para os volumes nos contornos do domínio, já que este possui as condições de contorno necessárias para representar o modelo físico.

Geralmente, são encontrados três tipos de condições de contorno (PATANKAR, 1980; FERZIGER e PERIC, 2002).

- 1) Condição de contorno de Dirichlet
- 2) Condição de contorno de Neumann
- 3) Condição de contorno de Robin

Na condição de contorno de Dirichlet a variável  $\phi$  do contorno é conhecida; para Neumann o fluxo da variável  $\phi$  no contorno é conhecido; e na condição de contorno de Robin para problemas de transferência de calor, há convecção, uma combinação linear de Dirichlet e Neumann. Ou seja, o fluxo de calor conhecido com o coeficiente de transferência de calor e a sua temperatura ao redor.

## 2.8 FORMAS DE APLICAR CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para os problemas de engenharia, as condições de contorno são importantes, bem como as suas implementações. Por isso, sua escolha bem como sua técnica de aplicação são importantes para solução numérica. Algumas formas de aplicar as condições de contorno que são frequentemente utilizadas em problemas de engenharia, bem como fazem parte de estudo deste trabalho são discutidas a seguir

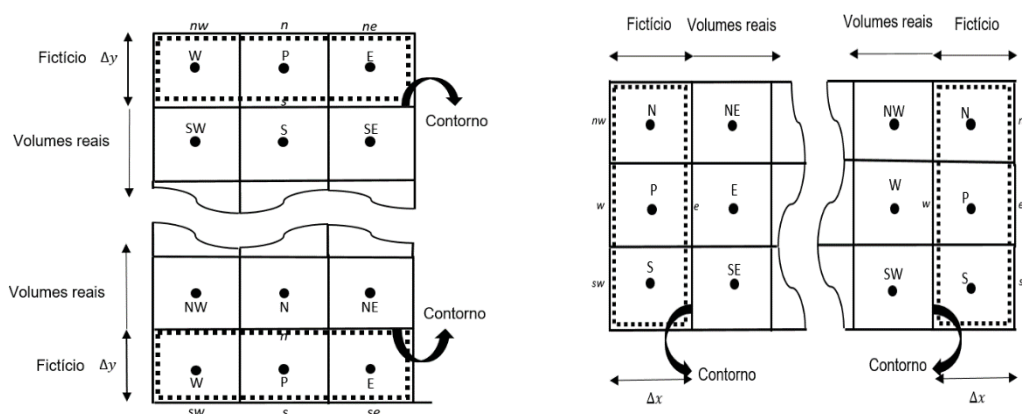
### 2.8.1 Volumes fictícios

Uma forma de aplicar condições de contorno é através da criação de volumes fictícios (FIGURA 8). Nesta técnica, são criados volumes inexistentes

nas fronteiras, os quais não tem posição geométrica na malha (MALISKA, 2013). Tal tipo de aplicação considera todos os volumes reais como volumes internos, incluindo os das fronteiras, enquanto a fronteira é compartilhada por volumes reais e fictícios.

Nos volumes fictícios, a desvantagem é a criação de novas incógnitas, aumentando o tamanho do sistema linear (MALISKA, 2013). É necessário criar equações para os volumes fictícios produzidos em função das condições de contorno existentes. Assim, os tipos de condição de contorno irão fornecer diferentes coeficientes para os contornos (APÊNDICE B). Por fim, mesmo com o aumento do número de equações, a aplicação de volumes fictícios é uma boa alternativa (MALISKA, 2013) pela sua fácil aplicação.

FIGURA 8 - CONDIÇÃO DE CONTO RNO COM VOLUME FICTÍCIO.

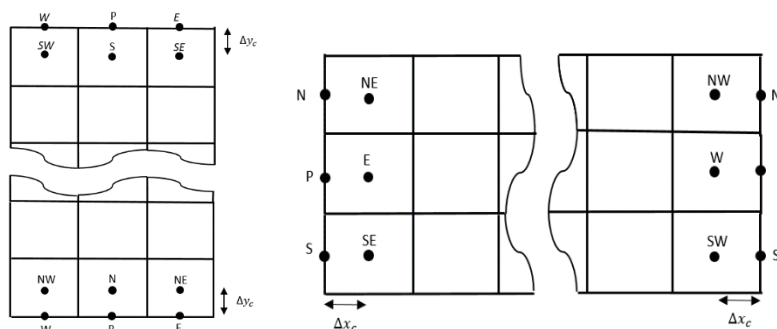


FONTE: O autor (2018).

### 2.8.2 Volumes de espessura zero

Na forma de aplicação com volumes no contorno de espessura zero (FIGURA 9) é criada uma malha de tal forma que o ponto central do último volume fique sobre o contorno. Assim, o volume de controle do contorno possui dimensão nula e não possui espessura (APÊNDICE B).

FIGURA 9 - CONDIÇÃO DE CONTORNO COM VOLUME DE ESPESSURA ZERO.



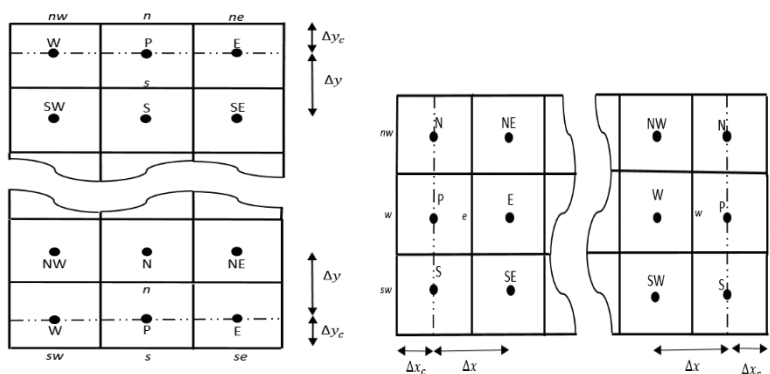
FONTE: O autor (2018).

### 2.8.3 Balanço para os volumes de fronteira

Segundo Maliska (2013), o método mais indicado para aplicação de condições de contorno é o balanço para os volumes de fronteira (FIGURA 10), isso ocorre devido ao seu embasamento físico e a possibilidade de utilização em sistemas mais complexos. Neste tipo de aplicação, a integração é feita para todos os volumes de controle do domínio incorporando os volumes da fronteira, os quais possuem uma face adjacente ao volume interno e uma face sobre o contorno. Assim não existe aumento no número das equações, e as condições de contorno ficam embutidas nas equações para os volumes dos contornos (MALISKA, 2013).

A fim de obter a equação aproximada no volume P do contorno, o procedimento realizado é exatamente o mesmo que para os volumes internos. Ou seja, integra-se a equação diferencial sobre o volume já empregando a condição de contorno imposta (APÊNDICE B).

FIGURA 10 - CONDIÇÕES DE CONTORNO COM BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA BIDIMENSIONAL



FONTE: O autor (2018).

## 2.9 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Para o cálculo dos fluxos advectivos e difusivos o valor da variável  $\phi$  e seu gradiente normal às faces dos volumes são necessários (FERZIGER e PERIC, 2002). Esses valores são expressos em termos dos valores nodais através de interpolação, conectando assim o volume principal aos seus vizinhos. Segundo Versteeg e Malalasekera (2007), aproximações lineares são as maneiras mais simples de calcular os valores nas interfaces e seus gradientes.

Essas aproximações podem ser obtidas a partir da série de Taylor. Segundo Moukalled, Mangani e Darwish (2016), qualquer função diferencial contínua  $\phi(x)$  pode ser representada por uma expansão em série de Taylor na sua vizinhança

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \phi_i + (x - x_i) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i + \\ & \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \right)_i \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde  $\phi$  é a variável dependente nos modelos matemáticos,  $\phi_i$  é o valor analítico exato obtido em qualquer coordenada  $x$  com expansão a partir do volume  $i$ , e  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i, \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i, \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i, \dots, \left( \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \right)_i$  são as derivadas de  $\phi_i$ . Se feita a expansão da série de Taylor para os volumes  $x_{i+1}$  ou  $x_{i-1}$ , ou seja, um volume a direita ou a esquerda do volume  $P$  central respectivamente, obtém-se expressões para as aproximações das derivadas da variável dependente para o volume seguinte ou anterior na malha, respectivamente (MOUKALLED, MANGANI e DARWISH, 2016). Em CFD existem várias funções de interpolação utilizadas para os termos difusivos e advectivos, por exemplo, o esquema UDS (*upstream differencing scheme*), esquema CDS (*central-differencing scheme*), esquema DDS (*downstream differencing scheme*), entre outros.

Para melhor exemplificar, considera-se uma aproximação UDS, com um volume a montante, que é uma aproximação de ordem 1. Através da expansão de Taylor, tem-se

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{(\phi_i - \phi_{i-1})}{(x - x_i)} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i \quad (2.18)$$

sendo  $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i, \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i, \dots, \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i$  as derivadas de 2ª, 3ª e  $n$ -ésima ordem de  $\phi_i$ , respectivamente. Assim, a Eq. (2.19) pode ser reescrita da forma

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = (\lambda_{UDS})_i + (\varepsilon_\tau)_i \quad (2.19)$$

sendo  $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i$  a aproximação numérica da derivada de 1ª ordem, sendo

$$(\lambda_{UDS})_i = \frac{(\phi_i - \phi_{i-1})}{(x - x_i)} \quad (2.20)$$

e  $(\varepsilon_\tau)_i$  é o erro de truncamento (MARCHI, 2001), que será melhor explicado mais adiante.

### 2.9.1 Esquema CDS (*central-difference scheme*) e DDS (*Dowstream Differencing Scheme*)

O esquema CDS é o mais comumente usado nas aproximações e é a aproximação de segunda ordem mais simples (FERZIGER e PERIC, 2002), também por envolver dois pontos nodais no cálculo. Segundo Maliska (2013), para um problema unidimensional e uma malha onde as faces dos volumes estejam localizadas no meio das distâncias nodais, tem-se

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} + (\varepsilon_\tau)_e \quad (2.21)$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} + (\varepsilon_\tau)_w \quad (2.22)$$



onde, como representado na Fig. 1,  $\phi_e$  e  $\phi_w$  são os valores nas faces  $e$  e  $w$ , respectivamente; enquanto  $(\varepsilon_\tau)_e$  e  $(\varepsilon_\tau)_w$  são os erros de truncamento nas faces  $e$  e  $w$ , respectivamente, e possuem ordem 2;  $\phi_E$ ,  $\phi_W$  e  $\phi_P$  são os valores da variável  $\phi$  no centro do volume, e,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} + (\varepsilon_\tau)_e \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} + (\varepsilon_\tau)_w \quad (2.24)$$

sendo  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e$  e  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w$  as derivadas nas faces  $e$  e  $w$ , respectivamente;  $\phi_E$ ,  $\phi_W$  e  $\phi_P$  são os valores da variável  $\phi$  no centro do volume, e  $\Delta x_e$  e  $\Delta x_w$  são as distâncias entre o centro dos volumes  $E$  e  $W$  e  $P$ , os quais são vizinhos (FIGURA 1). Também,  $(\varepsilon_\tau)_e$  e  $(\varepsilon_\tau)_w$  são os erros de truncamento das aproximações das derivadas de primeira ordem nas faces  $e$  e  $w$ , respectivamente, e possuem ordem 2. Para um problema bidimensional, as aproximações através do esquema CDS são da mesma forma, mas tem-se então aproximações também para o norte  $N$  (*north*) e o sul  $S$  (*South*).

E assim, após calculadas as aproximações, substituem-se as mesmas na equação resultante da integração. Então, a equação pode ser escrita na forma da eq. (2.4) afim de obter os coeficientes (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Já o esquema DDS é um esquema para aproximação da derivada de primeira ordem (MARCHI, 2001), e foi utilizado para fazer a aproximação no contorno leste do domínio. Esse tipo de aproximação utiliza um volume a jusante, e fornece aproximações de primeira ordem. Isolando a derivada de primeira ordem, tem-se que a aproximação DDS é representada por

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_p = \frac{\phi_E - \phi_P}{h} + (\varepsilon_\tau)_p \quad (2.25)$$

onde  $\phi_E$  e  $\phi_P$  são os valores da variável  $\phi$  no centro dos volumes  $E$  e  $P$ ;  $h$  é a distância entre os centros dos volumes;  $(\varepsilon_\tau)_p$  é o erro de truncamento e tem ordem 1.

## 2.10 GAUSS-SEIDEL

Neste trabalho foi utilizado o *solver* Gauss-Seidel com o objetivo de resolver o sistema de equações algébricas representado pela Eq. (2.2), isto é, obter os valores para a variável  $\phi$ . Sendo o domínio de cálculo bidimensional, a matriz de coeficientes utilizada gera um sistema que possui 9 diagonais.

O Gauss-Seidel é um método indireto ou iterativo de solução de equações, que segue um procedimento “*guess-and-correct*”, ou seja, gradualmente vai refinando a solução estimada através de repetidamente resolver as equações discretas (MOUKALLED, MANGANI e DARWISH, 2016). Este método resolve o sistema de equações lineares ponto a ponto iterativamente.

## 2.11 VERIFICAÇÃO

Em CFD, verificação e validação são os dois processos principais para garantir a credibilidade do modelo e simulações (AIAA, 1998). Na busca de uma solução numérica para um problema real é comum realizar comparações entre os resultados obtidos e os valores analíticos. O erro numérico é definido como a diferença entre a solução analítica exata ( $\Phi$ ) e a solução numérica ( $\phi$ ) (FERZIGER E PERIC, 2002), ou seja

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (2.26)$$

e assim, uma solução numérica ideal é igual a solução analítica exata do problema, ou seja, quando o erro é nulo (MARCHI, 2001).

O processo que quantifica o erro numérico é chamado de verificação (ROACHE, 1998; FORTUNA, 2000), e seu objetivo é determinar de que maneira o modelo matemático pode ser resolvido adequadamente através de um método

numérico. Assim, o objetivo é trabalhar de tal forma a fim de identificar as fontes de erros, quantifica-los e reduzi-los.

### 2.11.1 Fontes de erros numéricos

Os erros numéricos envolvem erros de iteração ( $\varepsilon_n$ ), erros de arredondamento ( $\varepsilon_\pi$ ), erros de programação ( $\varepsilon_p$ ) e erros de truncamento ( $\varepsilon_\tau$ ) (MARCHI e SILVA, 2002), e matematicamente

$$E(\phi) = E(\varepsilon_n, \varepsilon_\pi, \varepsilon_p, \varepsilon_\tau) \quad (2.27)$$

A forma de diminuir os erros numéricos é diminuir o tamanho dos volumes da discretização do domínio, ou seja, refinar a malha (FERZIGER e PERIC, 1996). As fontes de erros numéricos serão exemplificadas a seguir.

#### **Erros de iteração**

O erro de iteração é a diferença entre a solução exata das equações discretizadas e a solução numérica em determinada iteração (FERZIGER e PERIC, 2002). Matematicamente

$$\varepsilon_n(\phi_i) = \phi_{i,k \rightarrow \infty} - \phi_{i,k} \quad (2.28)$$

sendo  $k$  o número da iteração corrente no processo de solução de equações algébricas, e  $k \rightarrow \infty$  representa a solução exata das equações discretizadas. Conforme o número de iterações cresce o erro de iteração diminui (MARCHI, 2001). Segundo Marchi (2001) o erro de iteração pode ser causado por fatores tais como: emprego de métodos iterativos, existência de não-linearidade no modelo matemático, entre outros.

#### **Erro de arredondamento**

Ocorrem nas computações com uma representação finita dos números reais, ou seja, são relacionados à quantidade de algarismos utilizados para

representar as variáveis no computador, bem como a quantidade de termos representados em uma série infinita (MARCHI, 2001). De acordo com Marchi (2001), para minimizar os erros de arredondamento é necessário utilizar uma maior precisão dos números, entretanto, isso exige uma memória computacional maior.

### **Erro de programação**

Os erros de programação ( $\varepsilon_p$ ) incluem os problemas com os códigos computacionais, como por exemplo, implementação e uso de um programa computacional, dados de entrada errados, entre outros (ROACHE, 1998; MARCHI, 2001).

### **Erro de truncamento**

Os erros de truncamento ( $\varepsilon_\tau$ ) são determinados pelas aproximações numéricas utilizadas na discretização do modelo matemático. Pode-se dizer que o erro de truncamento é o resíduo que resulta quando se substitui a solução analítica exata da variável dependente ( $\phi$ ) na equação discretizada do modelo matemático (MARCHI, 2001).

O valor do erro de truncamento pode ser determinados pela série de Taylor da função em torno de um ponto (MARCHI, 2001; MALISKA, 2013). Segundo Ferziger e Peric (2002), o primeiro termo truncado é normalmente a principal fonte de erro, e também, mede a acurácia da aproximação e determina a taxa com que o erro cai com o número de pontos da malha. Segundo Marchi (2001), quanto maior o número de volumes na malha e menor o tamanho do volume da malha ( $h$ ), menor é o erro de discretização, representado matematicamente pela Eq. 2.33.

Com isso, para volumes da malha tendendo a zero, ou seja,  $h \rightarrow 0$ , tem-se (MARCHI, 2001)

$$\varepsilon_\tau = C h^p \quad (2.29)$$

onde  $C$  é um coeficiente admitido constante e  $p$  é a ordem do erro de truncamento. O erro de truncamento de uma equação diferencial ou de uma aproximação numérica qualquer pode ser escrito como a soma de infinitos termos, a partir da série de Taylor, como mostrado nas Eqs. (2.17), (2.18) e (2.19), na forma (MARCHI, 2001; FERZIGER e PERIC, 2002):

$$\varepsilon_\tau(\phi) = C_1 h^{p_L} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + \dots \quad (2.30)$$

onde  $\phi$  = variável de interesse;  $h$  = tamanho dos volumes da malha;  $C_1, C_2, \dots$  são coeficientes admitidos constantes;  $p_2, p_3, \dots$  = ordens verdadeiras do erro de discretização e  $p_L$  = ordem assintótica do erro de discretização.

As ordens verdadeiras são números positivos que geralmente organizam uma série aritmética infinita, e são os expoentes de  $h$  dos termos não-nulos do erro de truncamento (MARCHI, 2001). E por definição, seguem a relação  $(p_L) < (p_2) < (p_3) < \dots$ . A ordem assintótica é o menor valor inteiro e positivo do expoente de  $h$  na equação do erro de truncamento e é o principal componente quando os valores de  $h \rightarrow 0$ , e satisfaz a condição  $p_L \geq 1$ . Graficamente, a ordem assintótica determina a inclinação da reta de um gráfico  $h$  versus erro de truncamento, que por sua vez, estabelece a ordem de  $\varepsilon_\tau$  (MARCHI, 2001).

### **Erro de discretização**

De acordo com Ferziger e Peric (2002), se o erro numérico é definido apenas envolvendo o erro de truncamento, então este é denominado erro de discretização, e é a diferença entre a solução exata das equações governantes e a solução exata da aproximação discreta. Segundo Marchi (2001), quanto maior o número de volumes na malha e menor o tamanho do volume da malha ( $h$ ), menor é o erro de discretização.

Para que o erro numérico seja composto somente pelo erro de discretização, é presumido que o modelo matemático possui simplificações para evitar erros de programação; a precisão computacional adotada seja adequada para minimizar erros de arredondamento, isto é, o erro numérico tende a zero conforme  $h \rightarrow 0$ , e assim eles são muito menores que o erros de truncamento; e

o número de iterações atinja o erro de máquina, afim de minimizar erros de iteração (MARCHI, 2001; SCHNEIDER, 2007).

A Eq. (2.31) representa o erro de discretização (MARCHI, 2001; FERZIGER E PERIC, 2002)

$$E(\phi) = C_1 h^{p_L} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + \dots \quad (2.31)$$

sendo  $C_i$  os coeficientes que independem de  $h$ ;  $p_L, p_2, p_3, \dots$  as ordens verdadeiras, onde  $p_L$  é a ordem assintótica do erro de discretização.

O erro de discretização é estimado por: estimativas *a priori* e *a posteriori* (OBERKAMPF e TRUCANO, 2002; MARCHI, 2001). As estimativas de erro *a priori* estimam a ordem assintótica ( $p_L$ ), enquanto as estimativas *a posteriori* estimam a magnitude do erro de discretização, essas estimativas serão comentadas a seguir.

#### 2.11.2 Estimativas de erro *a priori*

Estimar o erro *a priori* significa realizar uma estimativa do erro de discretização, ou seja, estimar a ordem assintótica ( $p_L$ ) sem informação resultante do código numérico, e estes cálculos proporcionam a análise qualitativa do erro de discretização (OBERKAMPF e TRUCANO, 2002; MARCHI, 2001).

O procedimento para estimar o erro de discretização *a priori* é estimar o erro de truncamento através da série de Taylor (MARCHI, 2001), e assumir que o erro tenha a forma como na equação (2.31), quando os volumes da malha tendem a zero ( $h \rightarrow 0$ ). Ou seja,

$$E(\phi) = C h^{p_L} \quad (2.32)$$

onde  $C$  é um coeficiente desconhecido. Assim, somente *a priori* não é possível saber o valor do erro de discretização, mas é possível avaliar o efeito produzido com a redução de  $h$ .

### 2.11.3 Estimativas de erro *a posteriori*

De acordo com Marchi (2001), a magnitude do erro de discretização pode ser estimada através de estimativas *a posteriori*. Essas estimativas são divididas em dois grupos: estimativa com uma única solução numérica, e estimativa do erro com base em várias malhas.

Alguns exemplos de estimadores de erros *a posteriori* encontrados na literatura e estudados por Marchi (2001) são: estimador delta, estimador GCI, Richardson, entre outros.

### 2.11.4 Ordens efetiva e aparente

Como visto anteriormente, se a solução numérica é livre de qualquer fonte de erro numérico, exceto o erro de truncamento, ele é então igual ao erro de discretização. Então, uma forma de verificar *a posteriori* se a ordem assintótica do erro de truncamento estimada *a priori* foi atingida é através das ordens efetiva e aparente (MARCHI, 2001).

#### Ordem efetiva

A ordem efetiva ( $p_E$ ) permite verificar *a posteriori* se conforme o valor de  $h$  (tamanho dos volumes da malha) diminui, a ordem do erro de discretização tende ao valor da ordem assintótica, e assim é definida como sendo a inclinação local da curva no gráfico do erro de discretização ( $E$ ) *versus*  $h$  (MARCHI, 2001). Matematicamente é obtida através de

$$C_E h^{p_E} = E(\phi) \quad (2.33)$$

sendo  $C_E$  um coeficiente constante, admitido ser independente de  $h$ . Marchi (2001), aplica para duas malhas com diferentes tamanhos de volumes, ou seja,  $h_1$  (mais grossa) e  $h_2$  (mais fina), e tem-se então:

$$C_E h_1^{p_E} = E(\phi_1) \quad (2.34)$$

$$C_E h_2^{p_E} = E(\phi_2) \quad (2.35)$$

sendo  $\phi_1$  e  $\phi_2$  as soluções numéricas obtidas das malhas mais grossa e da malha mais fina, respectivamente. As equações (2.34) e (2.35) formam um sistema, que resolvendo obtém-se

$$p_E = \frac{\log \left[ \frac{E(\phi_1)}{E(\phi_2)} \right]}{\log(q)} = \frac{\log \left( \frac{\Phi - \phi_1}{\Phi - \phi_2} \right)}{\log(q)} \quad (2.36)$$

onde  $E(\phi_1)$  e  $E(\phi_2)$  são erros de discretização de duas soluções numéricas  $\phi$  referentes às malhas mais grossa e a mais fina respectivamente, e são conhecidos;  $\Phi$  é a solução analítica exata;  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são as soluções numéricas referentes às malhas mais grossa e mais fina, respectivamente. A razão de refino  $q$  da malha dado por

$$q = \frac{h_1}{h_2} \quad (2.37)$$

### Ordem aparente

Assim como a ordem efetiva, a ordem aparente permite a verificação *a posteriori* da solução numérica se a ordem da incerteza tende a ordem assintótica enquanto o valor de  $h$  diminui, e é definida como a inclinação local da curva no gráfico da incerteza ( $U$ ) *versus*  $h$  (MARCHI, 2001). Deste modo, a ordem aparente é obtida através de

$$K_U h^{p_U} = U(\phi) \quad (2.38)$$

onde  $K_U$  é um coeficiente que é admitido independente de  $h$  e  $U$  é a incerteza da solução numérica, definido como

$$U(\phi) = \phi_\infty - \phi \quad (2.39)$$



onde  $\phi_\infty$  é a solução analítica estimada, e  $\phi$  é a solução numérica (MARCHI, 2001). Assim, de acordo com Marchi (2001), considerando as soluções em três malhas distintas ( $h_1, h_2$  e  $h_3$ )

$$K_U h_1^{P_U} = \phi_\infty - \phi_1 \quad (2.40)$$

$$K_U h_2^{P_U} = \phi_\infty - \phi_2 \quad (2.41)$$

$$K_U h_3^{P_U} = \phi_\infty - \phi_3 \quad (2.42)$$

com as incógnitas do sistema sendo  $\phi_\infty$ ,  $K_U$  e  $P_U$ . A solução desse sistema para o caso em que a razão de refino da malha ( $q$ ) é constante, chega-se a:

$$P_U = \frac{\log \left[ \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{(\phi_3 - \phi_2)} \right]}{\log(q)} \quad (2.43)$$

onde as soluções  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  são obtidas das malhas super grossa, grossa e fina, respectivamente, e  $q$  é avaliado como na Eq. (2.37).

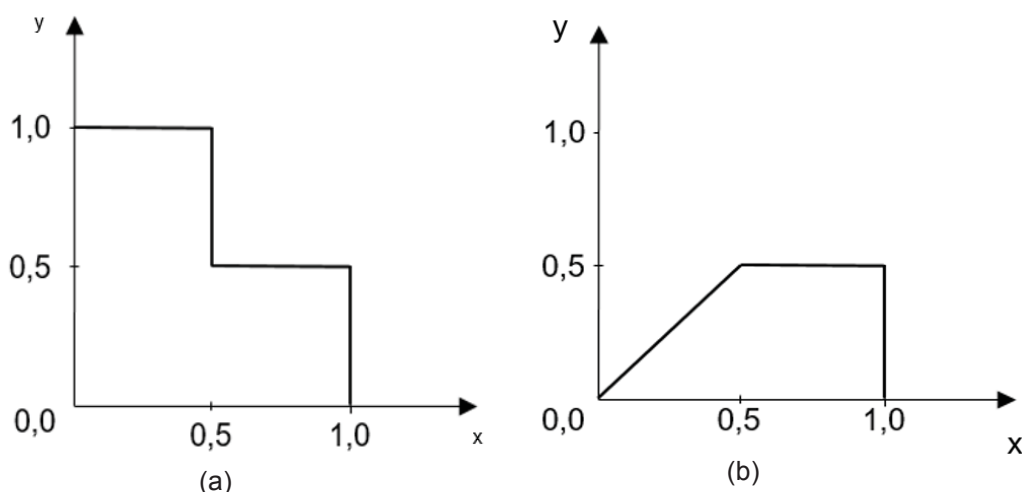
### 3 PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

Este capítulo aborda o modelo matemático e os numéricos utilizados para realização do trabalho. O modelo matemático consiste na equação diferencial que modela a difusão de calor bidimensional em regime permanente e com propriedades constantes, representada pela equação de Poisson. O modelo numérico traz a transformação de coordenadas, bem como a transformação da equação governante. Também, o método empregado na discretização da equação diferencial; os métodos utilizadas para gerar as malhas, através de interpolação de Lagrange e equações diferenciais elípticas; as condições de contorno e as formas de aplicar as condições de contorno através de volumes fictícios, balanço de volumes na fronteira (sem volumes fictícios e volumes de espessura zero); análise *a priori* e solução numérica. Além de mostrar os valores analíticos das variáveis estudadas e a simbologia utilizada para cada variável.

#### 3.1 MODELO MATEMÁTICO

O presente trabalho é fundamentado na equação diferencial de Poisson, a qual modela o problema bidimensional linear de difusão de calor. As geometrias utilizadas para domínio de cálculo e análise numérica estão representadas pela Fig. 11 (a) o formato de L, e na Fig. 11 (b), o trapézio.

FIGURA 11 - GEOMETRIAS UTILIZADAS PARA ANÁLISE.



### 3.1.1 Equação de Poisson

A equação de Poisson aparece em muitos problemas físicos, a qual tem grande aplicação na engenharia mecânica e eletrostática. É uma forma de equação diferencial parcial elíptica (TANNEHILL, ANDERSON e PLETCHER, 1997), e fornece uma análise da condução de calor linear. A equação de Poisson bidimensional correspondente é

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + S = 0 \quad (3.1)$$

onde  $T$  é a temperatura e é a variável de interesse; e  $S$  o termo fonte que foi obtido através de soluções fabricadas (SHIH *et al*, 1989; ROACHE, 1994), dado por

$$S = -\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad (3.2)$$

e a solução analítica para o presente problema é

$$T(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad (3.3)$$

Dada a Eq. (3.3), é possível obter as condições de contorno para ambas as geometrias. Para a geometria em formato de L, os valores de temperatura conhecidos na fronteira são

$$T(x, 0) = T(0, y) = 0 \quad (3.4)$$

$$T(x, 1) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right), \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

$$T\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right), \text{ se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad (3.6)$$

$$T(1, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right), \text{ se } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

$$T\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right), \text{ se } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \quad (3.8)$$

enquanto para o trapézio são dadas pelas Eqs. (3.6), (3.7) e

$$T(x, 0) = 0 \quad (3.9)$$

$$T(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right), \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

Os valores encontrados analiticamente para as variáveis de interesse, são:

TABELA 1 - RESULTADOS ANALÍTICOS PARA AS VÁRIÁVEIS DE INTERESSE.

VARIÁVEL DE INTERESSE	VALOR
Média de $T$	2,70189823046234E-01
Média de $T$ no contorno leste	3,72923228578056E-01
Derivada de 1ª ordem de $T$ no contorno leste	3,5869074291186E-17

Os valores da Tab. 1 foram calculados pelo *Fortran Console Application* com o Fortran 95 por meio do aplicativo Intel Visual Studio 2008 com precisão dupla. Os mesmos estão em notação científica onde E representa o exponencial de base decimal (10). O computador utilizado para os cálculos realizados neste trabalho foi o CFD32, do Laboratório de Experimentação Numérica (LENA-1) da Universidade Federal do Paraná, o qual possui um processador Intel® Core™ i7-4790, com velocidade de 3,60GHz, memória de 8GB de RAM e Windows 7 Professional de 64bits.

### 3.2 MODELO NUMÉRICO

Para resolver numericamente a Eq. (3.1) foi utilizado o método dos volumes finitos. A discretização das geometrias bidimensionais, representadas na Fig. (11), foi realizada através de equações elípticas e interpolação de Lagrange para malhas estruturadas não ortogonais com transformação de coordenadas.

Na equação governante discretizada, representada pela equação de Poisson, foram feitas as seguintes simplificações: regime permanente e propriedades constantes. Além de aplicadas condições de contorno de Dirichlet e Neumann, com três: com volume fictício, sem volume fictício e volumes de espessura zero.

### 3.2.1 Transformação De Coordenadas

Ao trabalhar com domínios de cálculo utilizando malhas estruturadas não ortogonais, o modo mais utilizado de resolver o sistema de equações é realizando a transformação de coordenadas, resolver as equações de conservação no sistema de coordenadas curvilíneas e assim, se resolvem as equações do plano físico no plano transformado (MALISKA, 2013).

Após realizada a transformação de coordenadas, as métricas de transformação são

$$\xi_x = y_\eta J \quad (3.11)$$

$$\eta_x = -y_\xi J \quad (3.12)$$

$$\xi_\eta = -x_\eta J \quad (3.13)$$

$$\eta_\eta = -x_\xi J \quad (3.14)$$

enquanto  $J$  é o Jacobiano da transformação, dado por

$$J = \frac{1}{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)} \quad (3.17)$$

Então, é possível realizar a transformação da equação de conservação do problema escrita no domínio físico para o domínio computacional. E assim, a equação transformada é

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ J \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ J \left( \gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] = \frac{S^\phi}{J} \quad (3.18)$$

### 3.2.1 Geração de Malhas

Para o presente trabalho foram utilizadas duas técnicas para geração de malhas: através de equações elípticas e da interpolação de Lagrange, exemplificadas e discutidas a seguir.

As malhas utilizadas possuem refino computacional uniforme de ordem de refino ( $q$ ) sendo 2, dada pela Eq. (2.40). Desta forma, para a geometria em L, as malhas iniciaram com 4 volumes na direção  $x$  e 2 na direção  $y$ , até uma malha de 1024 volumes para  $x$  e 512 para  $y$ . Enquanto para a geometria do trapézio, iniciou-se com a malha de 4x4 volumes para as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, até a malha mais fina sendo de 1024x1024 volumes, para as direções  $x$  e  $y$ .

#### 3.2.1.1 Geração De Malhas Através De Equações Elípticas

Para as malhas geradas através de equações elípticas, sabe-se que o sistema gerador é dado por

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta) \quad (3.19)$$

$$\nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta) \quad (3.20)$$

sendo  $P$  e  $Q$  os termos fontes. Para obter a malha é necessário resolver essas equações, então, esse sistema deve ser resolvido no sistema  $(x, y)$ . Como são equações diferenciais parciais e o domínio é arbitrário, nem sempre é possível ter uma solução analítica das mesmas (MALISKA, 2013). Assim, a maneira altamente difundida é através do sistema de coordenadas curvilíneas tanto essas equações, quanto as do problema físico, que são resolvidas no plano transformado. Considerando então as Eqs. (3.19) e (3.20), e iniciando a transformação, faz-se

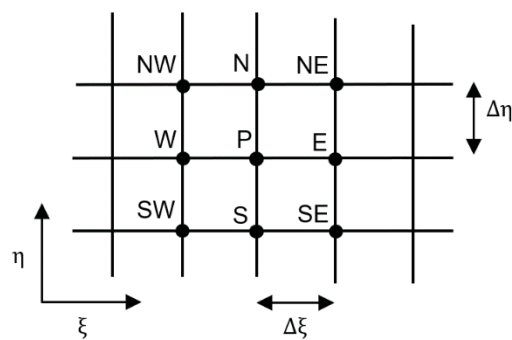
$$\xi = \xi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y)$$

e pela regra da cadeia para obtenção das derivadas de primeira e segunda ordem. Obtêm-se as  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $J$  como as Eqs. de (2.09) a (2.12), e ainda, as equações de geração transformadas são dadas como nas Eqs. (2.7) e (2.8).

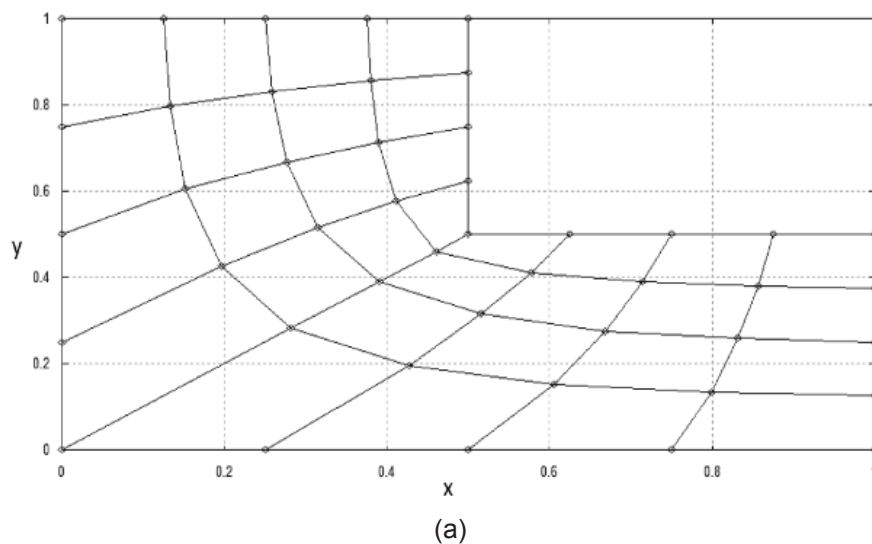
Por fim, são resolvidas as equações transformadas para determinar os valores de  $x$  e  $y$  para os pontos internos, simbolizados pelo ponto  $P$  (FIGURA 12), sendo que o sistema de equações foi resolvido pelo Gauss-Seidel. E mais ainda, as malhas geradas são representadas pelas Figs. 13.

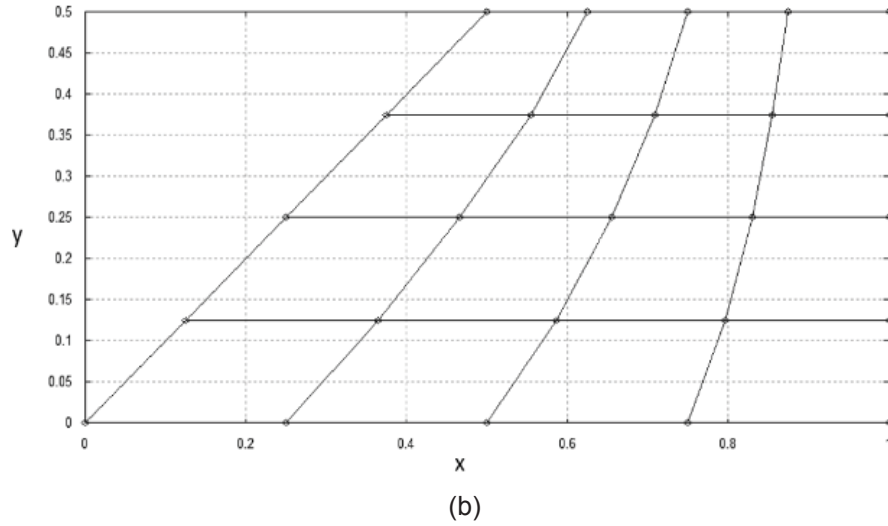
FIGURA 12 - PONTOS REPRESENTADOS PARA GERAÇÃO DA MALHA.



FONTE: O autor (2019).

FIGURA 13 - EXEMPLOS DAS MALHAS GERADAS ATRAVÉS DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS PARA AMBOS DOMÍNIOS ESTUDADOS: (A) EM FORMATO DE L; (B) TRAPÉZIO.





### 3.2.1.2 Geração De Malhas Através De Interpolação De Lagrange

As malhas geradas através da interpolação de Lagrange tem como polinômio genérico a Eq. (2.13). Considera-se a Fig. 14, e seja  $r = xi + yj$ , as seguintes propriedades para a função  $\phi$  podem ser demonstradas (MALISKA, 2013)

$$\phi_n \left( \frac{\xi_m}{I} \right) = \delta_{mn} \quad (3.21)$$

sendo

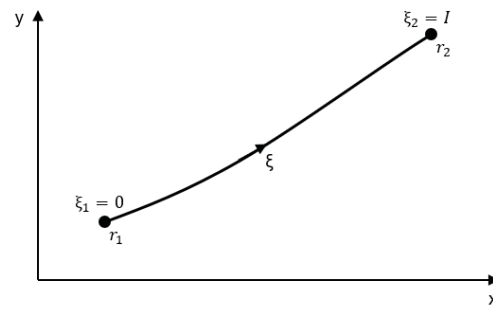
$$r(\xi_m) = \sum_{n=1}^N \phi_n \left( \frac{\xi_m}{I} \right) r_n = \sum_{n=1}^N \delta_{mn} r_n = r_m \quad (3.22)$$

e  $\phi_n$  é definida por

$$\phi_n \left( \frac{\xi}{I} \right) = \prod_{k=1}^N \frac{\xi - \xi_k}{\xi_n - \xi_k} \quad (k \neq n) \quad (3.23)$$



FIGURA 14 - EXEMPLO DA INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE.



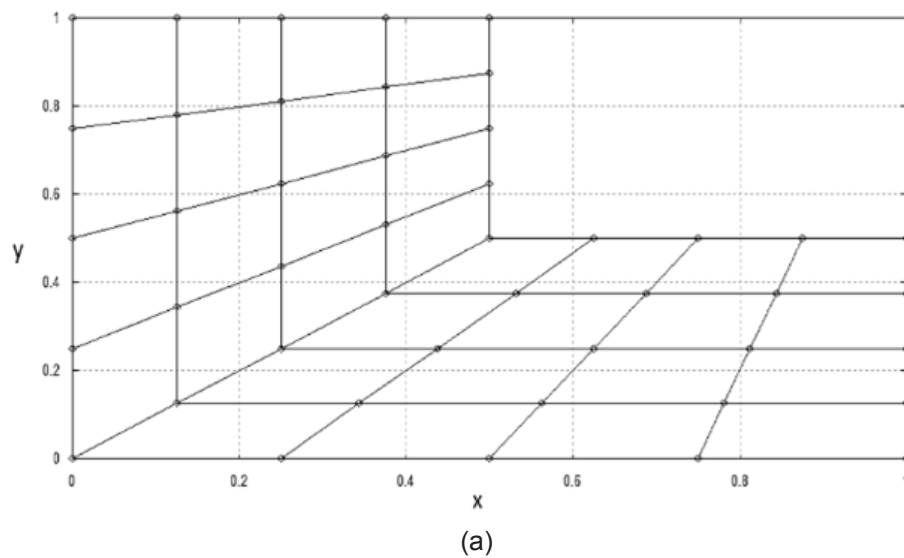
FONTE: Maliska (2013).

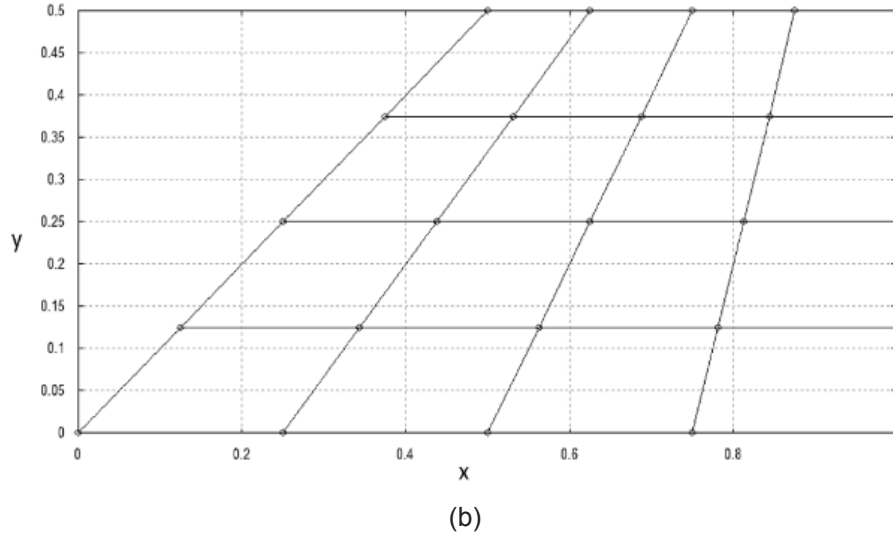
Assim, seja  $N = 2$ , tem-se um polinômio de interpolação do tipo

$$r(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{I}\right) r_1 + \frac{\xi}{I} r_2 \quad (3.24)$$

e por fim, as malhas geradas estão representadas pela Fig. 15.

FIGURA 15 - EXEMPLOS DAS MALHAS GERADAS ATRAVÉS DE INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE: A) EM FORMATO DE L; B) TRAPÉZIO.





### 3.2.2 Discretização da equação governante

A discretização é realizada através da equação transformada (EQUAÇÃO 3.18) no plano bidimensional para o domínio computacional. Realizando assim a integração da Eq. (3.18)

$$\int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ J \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta + \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ J \left( \gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] d\xi d\eta$$

$$= \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{S^{\phi}}{J} d\xi d\eta$$

$$\left[ J \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] \Big|_w^e \Delta\eta + \left[ J \left( \gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] \Big|_s^n \Delta\xi = \frac{S^{\phi}}{J} \Delta\xi \Delta\eta \quad (3.25)$$

as aproximações para as derivadas nas faces são feitas com CDS-2 (APÊNDICE A). Após realizada as aproximações, substitui-as na Eq. (3.25) e é possível escrever na forma dada pela Eq. (3.26). Assim, são obtidos os coeficientes do sistema dados pelas Eqs. (3.27) a (3.36)

$$a_p T_P = a_w T_W + a_e T_E + a_s T_S + a_n T_N + a_{ne} T_{NE} + a_{se} T_{SE} + a_{sw} T_{SW}$$

$$+ a_{nw} T_{NW} + b_P \quad (3.26)$$

$$a_p = J_e \alpha_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + J_w \alpha_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + J_n \alpha_n \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + J_s \alpha_s \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (3.27)$$

$$a_e = \left( J_e \alpha_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} - J_n \frac{\beta_n}{4} + J_s \frac{\beta_s}{4} \right) \quad (3.28)$$

$$a_w = \left( J_w \alpha_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} - J_s \frac{\beta_s}{4} + J_n \frac{\beta_n}{4} \right) \quad (3.29)$$

$$a_n = \left( J_n \gamma_n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} - J_e \frac{\beta_e}{4} + J_w \frac{\beta_w}{4} \right) \quad (3.30)$$

$$a_s = \left( J_s \gamma_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} - J_w \frac{\beta_w}{4} + J_e \frac{\beta_e}{4} \right) \quad (3.31)$$

$$a_{ne} = \left( -J_e \frac{\beta_e}{4} - J_n \frac{\beta_n}{4} \right) \quad (3.32)$$

$$a_{se} = \left( J_e \frac{\beta_e}{4} + J_s \frac{\beta_s}{4} \right) \quad (3.33)$$

$$a_{nw} = \left( J_w \frac{\beta_w}{4} + J_n \frac{\beta_n}{4} \right) \quad (3.34)$$

$$a_{sw} = \left( -J_w \frac{\beta_w}{4} - J_s \frac{\beta_s}{4} \right) \quad (3.35)$$

$$b_p = -\frac{S^\emptyset}{J} \Delta \xi \Delta \eta \quad (3.36)$$

que são válidos para todos os volumes internos. Para os contornos, serão aplicadas condições de contorno através de três formas utilizando Dirichlet e Neumann, as quais são exemplificadas melhor no capítulo 4 e no Apêndice B.

### 3.2.2.1 Condições de Contorno

No presente trabalho, as condições de contorno foram aplicadas através de três técnicas: com volumes fictícios, balanço de volumes na fronteira (sem volumes fictícios) e com volumes de espessura zero; utilizando as condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Para isso, as malhas geradas para a técnica dos volumes fictícios são parecidas com as de balanço de volumes (sem volumes fictícios), já que os volumes fictícios não possuem posição geométrica na malha e assim não aparecem na malha gerada. Dado isso, as mesmas juntamente com as malhas geradas para balanço de volumes são representadas

pelas Figs. 16 e 17. Para a técnica do volume de espessura zero, a malha é representada pelas Figs. 18 e 19, e para as três técnicas, a variável de interesse é calculada nos centroides, marcados pelo “x” nas figuras.

FIGURA 16 - EXEMPLOS DE MALHA PARA A GEOMETRIA EM L PARA A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA E VOLUMES FICTÍCIOS.

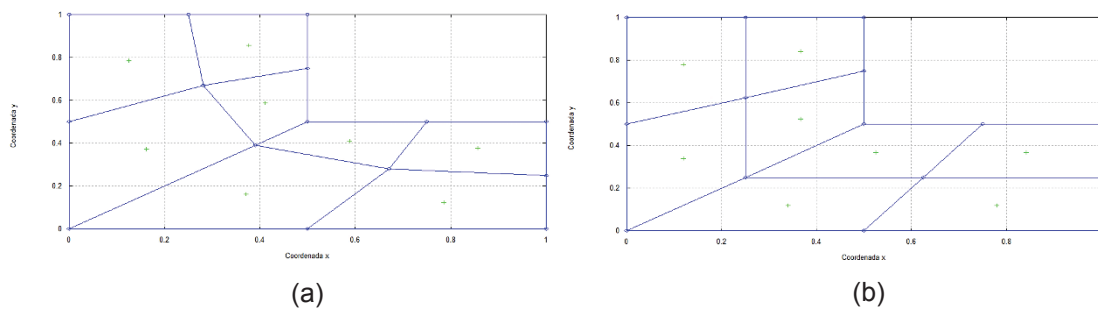


FIGURA 17 - EXEMPLOS DE MALHA PARA A GEOMETRIA DO TRAPÉZIO PARA AS TÉCNICAS DE VOLUMES FICTÍCIOS E BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA.

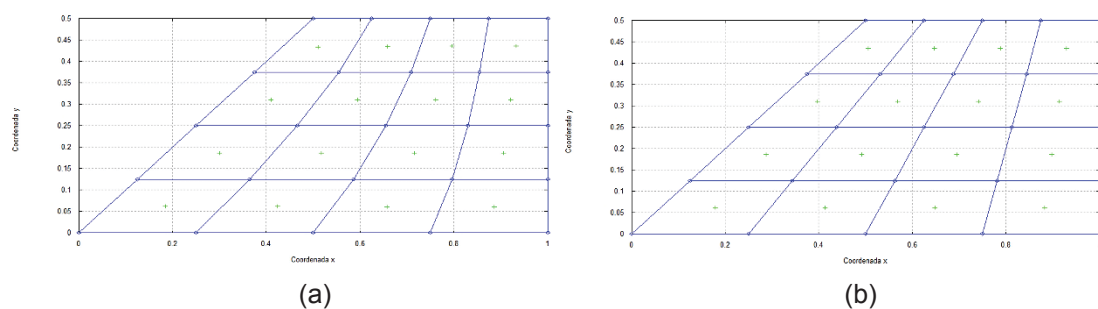


FIGURA 18 - EXEMPLOS DE MALHAS GERADAS PARA A GEOMETRIA EM L COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.

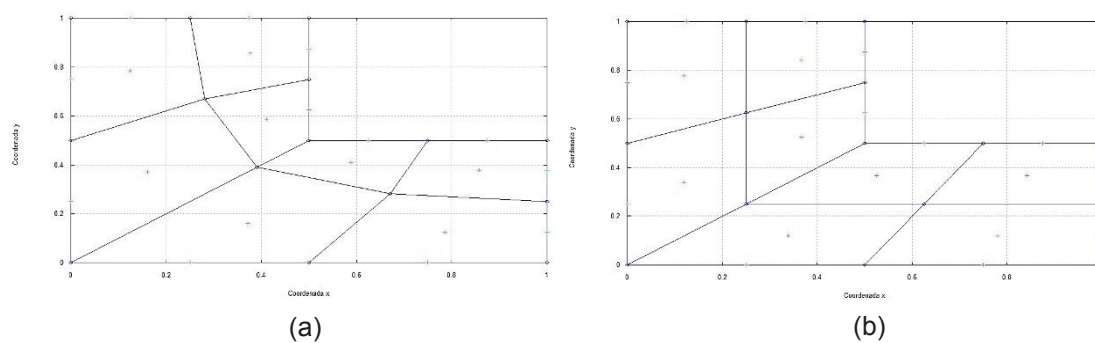
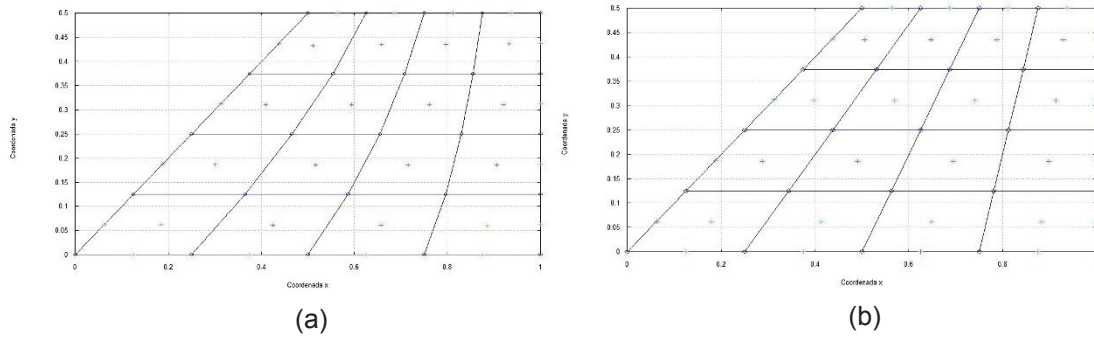
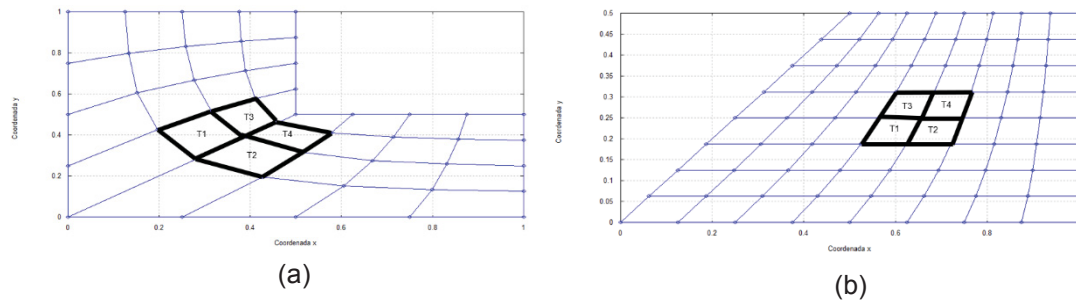


FIGURA 19 - EXEMPLOS DE MALHAS GERADAS PARA O TRAPÉZIO COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.



As variáveis de interesse são a temperatura média no domínio, simbolizada por  $T_m$ , e calculada através da regra do retângulo. O erro numérico ( $E$ ) e as temperaturas  $T_1, T_2, T_3, T_4$  calculadas nos volumes do centro do domínio, como por exemplo os volumes representados nas Fig. 20, sendo sempre os mesmos volumes até a malha mais fina. Os quatro volumes centrais no domínio foram escolhidos de maneira a se analisar a ordem do erro no interior da geometria.

FIGURA 20 - VOLUMES NO CENTRO DO DOMÍNIO UTILIZADOS PARA CÁLCULOS.



Também, a média da temperatura na face leste ( $I_{CL}$ ), calculada pela regra do retângulo

$$\overline{T_{CL}} = I_{CL} = \frac{1}{L} \sum_{1}^{N2} T_P \quad (3.37)$$

onde  $L$  é o comprimento em  $y$  que tem valor 0,5. A derivada na face leste ( $D_{CL}$ ), calculada por uma aproximação DDS,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2(T_c - T_p)}{\Delta x} \quad (3.38)$$

e com média calculada através da regra do retângulo, dado por

$$\frac{dT}{dx} = D_{CL} = \frac{1}{L} \sum_1^{N2} \int_0^L T_p dy \quad (3.39)$$

Todos os cálculos foram feitos para as três técnicas utilizando condições de contorno de Dirichlet e Neumann, e baseados na norma do resíduo até o erro de máquina para evitar erros de iteração. A norma do resíduo foi calculada de forma que o critério utilizado para interromper o processo iterativo foi

$$\frac{L^n}{L^0} \leq Tol \rightarrow \text{parar} \quad (3.40)$$

onde  $L^n$  é a norma do resíduo na iteração  $n$ ,  $L^0$  é a norma antes de iniciar o processo iterativo e  $Tol$  é a tolerância admitida para interromper o processo iterativo, que foi usado  $10^{-6}$ .

### 3.3 ANÁLISE A PRIORI DA ORDEM DO ERRO NUMÉRICO

Realizando a dedução das expressões para as variáveis de interesse, foi possível construir a Tab. 2, onde consta as ordens assintóticas e verdadeiras do erro numérico obtidas *a priori*. Tais deduções constam no Apêndice A. O erro numérico para o presente trabalho, foi assumido como erro de discretização.

As estimativas *a priori* são utilizadas para estimar a ordem do erro de discretização através da série de Taylor sem obtenção da solução numérica. Ou seja, permite avaliar qual o efeito do tipo da aproximação numérica usada, também em relação à redução do tamanho dos volumes da malha, ou seja,  $\Delta\xi, \Delta\eta$ , sobre o erro de discretização. Sendo assim, as estimativas *a priori* são uma análise qualitativa do erro de discretização antes da obtenção da solução numérica (MARCHI, 2001; SUERO, 2006).

TABELA 2 - ORDENS VERDADEIRAS E ASSINTÓTICA DAS VARIÁVEIS DE INTERESSE.

VARIÁVEL DE INTERESSE	ORDENS VERDADEIRAS	ORDEM ASSINTÓTICA
$\bar{T}$ com a regra do retângulo	$p_v = 2, 4, 6, \dots$	$p_L = 2$
$T$ no meio do domínio	$p_v = 2, 4, 6, \dots$	$p_L = 2$
$\bar{T}$ no contorno leste	$p_v = 2, 4, 6, \dots$	$p_L = 2$
Derivada no contorno leste	$p_v = 1, 2, 3, \dots$	$p_L = 1$

A Tab. 2 mostra as ordens verdadeiras e assintótica para as variáveis de interesse obtidas *a priori* através da expansão da série de Taylor. Para as 3 primeiras variáveis da tabela foram utilizados esquemas de 2ª ordem, por diferenças centrais. Já para a última variável, foi utilizado o esquema DDS que é de 1ª ordem. Todas as variáveis têm suas médias calculadas através da integração pela regra do retângulo. O procedimento empregado *a priori* através da expansão da série de Taylor para as aproximações está demonstrado no Apêndice A.

### 3.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A propriedade física estudada para a equação de Poisson no presente trabalho para as variáveis de interesse foi a temperatura ( $T$ ). A Tab. 3 mostra a simbologia atribuída para as variáveis estudadas.

TABELA 3 - VARIÁVEIS DE INTERESSE PARA ANÁLISE DOS CÁLCULOS.

VARIÁVEL DE INTERESSE	SÍMBOLO
Temperatura média no domínio pela regra do retângulo	$T_m$
Erro numérico	$E$
Temperaturas nos volumes do centro do domínio	$T_1, T_2, T_3, T_4$
Temperatura média no contorno leste pela regra do retângulo	$I_{CL}$
Derivada no contorno leste	$D_{CL}$

O computador utilizado para os cálculos realizados neste trabalho para as variáveis de interesse foi o CFD32, do Laboratório de Experimentação Numérica (LENA-1) da Universidade Federal do Paraná, o qual possui um processador Intel® Core™ i7-4790, com velocidade de 3,60GHz, memória de 8GB de RAM e Windows 7 Professional de 64bits.

O tipo de projeto utilizado para criar os programas computacionais foi o *Fortran Console Application*, onde a linguagem utilizada para implementar os programas foi através do Fortran 95 por meio do aplicativo Microsoft Visual Studio 2008 versão 9.0, com precisão dupla.



#### 4 RESULTADOS A RESPEITO DA GEOMETRIA EM L

Este capítulo aborda os resultados obtidos para a geometria do L com as três técnicas de aplicação de condição de contorno para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann. As Figs. 21 e 22 representam o campo de temperaturas analíticas e numéricas, respectivamente; já a Fig. 23 ilustra as isotermas para o L. Independente da técnica de aplicação de condição de contorno, os campos e isotermas para a geometria dada são os mesmos.

FIGURA 21 - CAMPO DE TEMPERATURAS ANALÍTICAS PARA O L.

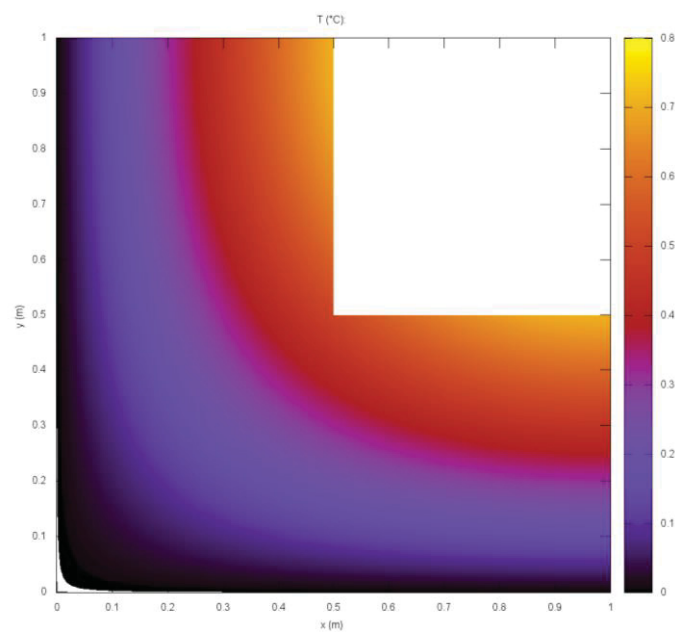


FIGURA 22 - CAMPO DE TEMPERATURAS NUMÉRICAS PARA O L.

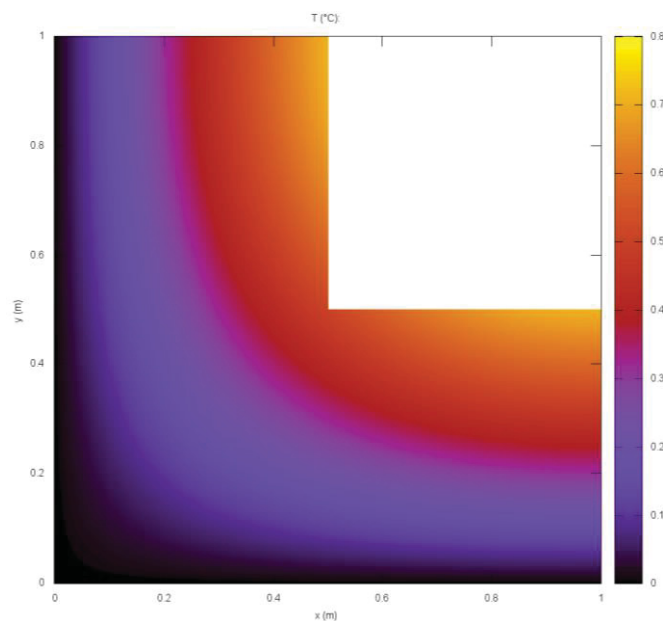
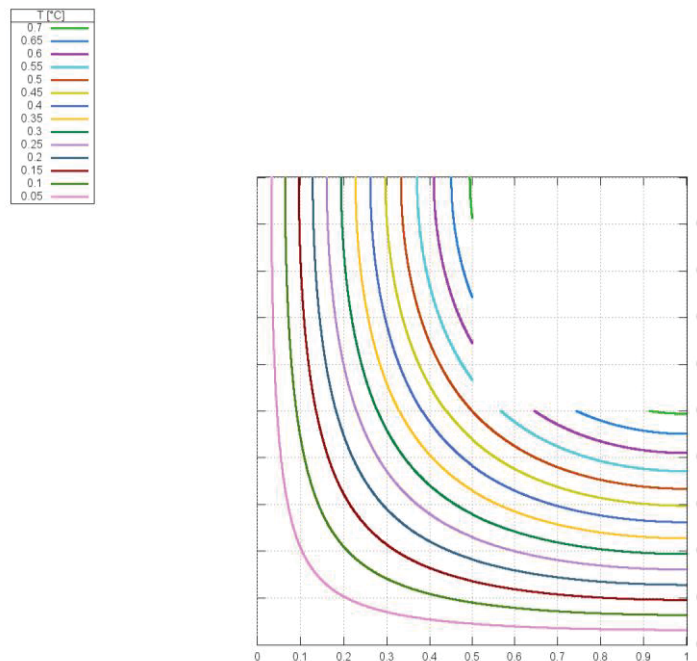


FIGURA 23 - ISOTERMAS PARA A GEOMETRIA DO L.



#### 4.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM VOLUMES FICTÍCIOS

No primeiro estudo e análise foram aplicadas condições de contorno de Dirichlet e Neumann utilizando a técnica de volumes fictícios. Os coeficientes obtidos para o contorno leste são dados a seguir como exemplos (ver Apêndice B), e os cálculos para os demais contornos são realizados de maneira análoga.

##### 4.1.1 Condição de contorno de Dirichlet

Para a condição de contorno de Dirichlet, tem-se como coeficientes para o contorno leste, por exemplo,

$$a_p = 1; a_w = -1; b_p = 2 T_w \quad (4.1)$$

sendo  $T_w$  a temperatura prescrita no contorno e calculada através da solução analítica. Todos os resultados foram obtidos com norma do resíduo até o máquina para evitar erros de iteração.

A primeira análise é feita para a temperatura média no domínio. O gráfico do módulo do erro numérico é dado pela Fig. 25, onde observa-se que para a

malha mais fina ( $1024 \times 512$  volumes) obtém-se um erro menor para a malha elíptica em comparação com a feita através de interpolação de Lagrange.

E com isso, as ordens efetiva e aparente baseadas na temperatura média do domínio estão representadas na Fig. 26. Observa-se que para a malha gerada através de interpolação de Lagrange, as ordens efetiva e aparente tendem a 1. Já para as malhas geradas através de equações elípticas, tem-se um valor tendendo a 1,7, e em seguida um comportamento não monotônico. Tal comportamento não é esperado, já que a análise *a priori* mostra uma ordem 2, além das aproximações realizadas serem de segunda ordem. Observa-se então degeneração da ordem esperada do erro baseada nas ordens efetiva e aparente.

FIGURA 24 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA VOLUMES FICTÍCIOS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET.

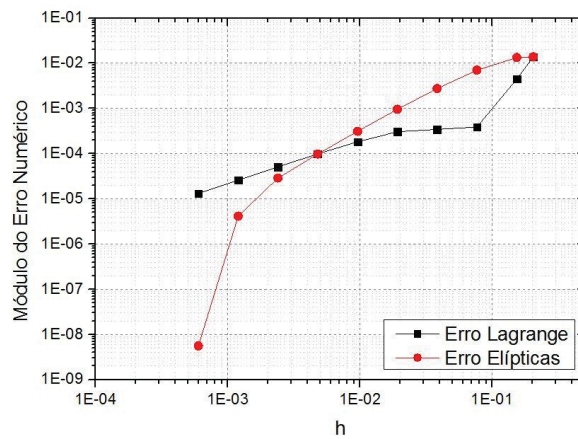
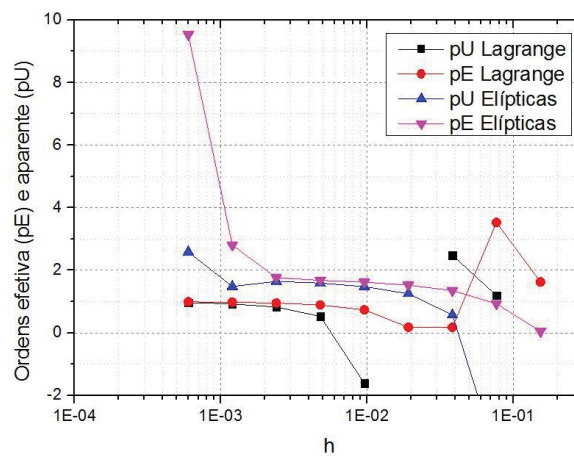


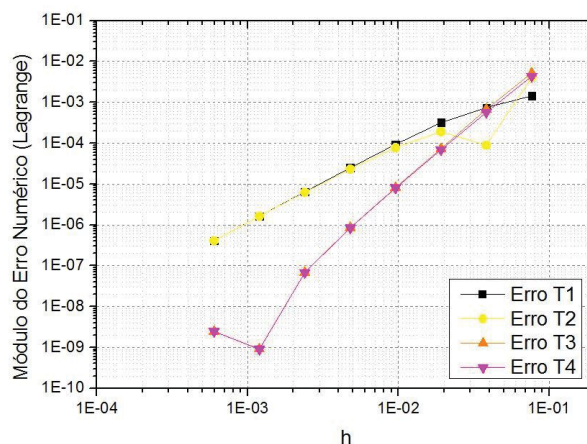
FIGURA 25 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADO DA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM VOLUMES FICTÍCIOS.



### Lagrange

Para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange, a Fig. 27 mostra o módulo do erro numérico para as temperaturas dos quatro volumes internos e centrais do domínio.

FIGURA 26 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



Em seguida, nas Figs. 28 e 29 apresentam as ordens aparente e efetiva, respectivamente, para as temperaturas dos quatro volumes internos e centrais do domínio. A ordem aparente ( $p_U$ ) tende ao valor 1 para os quatro volumes conforme a malha é refinada. Já para a ordem efetiva ( $p_E$ ), observa-se que para os volumes T1 e T2 a ordem tende ao valor 2; enquanto para os volumes T3 e T4 tende a 3 e em seguida observa-se uma tendência não monotônica conforme a malha é refinada.

As últimas variáveis de interesse estudadas são a média da temperatura ( $I_{cl}$ ) e o fluxo ( $D_{cl}$ ) no contorno leste. A Fig. 30 mostra o módulo do erro numérico para as duas variáveis, e a Fig. 31 mostra as ordens efetiva ( $p_E$ ) e aparente ( $p_U$ ) para tais variáveis. Observa-se que para as médias da temperatura ( $I_{cl}$ ) e do fluxo no contorno leste ( $D_{cl}$ ) as ordens efetiva ( $p_E$ ) e aparente ( $p_U$ ) tendem a 2.

E a Fig. 32 traz o campo de temperaturas baseado no erro numérico para malhas geradas através de interpolação de Lagrange. Nota-se que a maior concentração do erro numérico ocorre na linha de simetria do domínio.

FIGURA 27 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

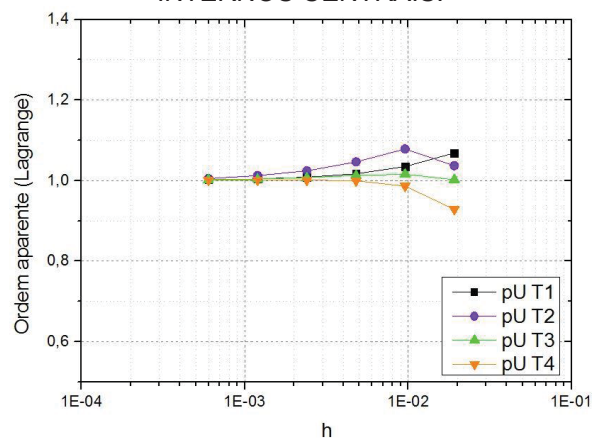


FIGURA 28 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

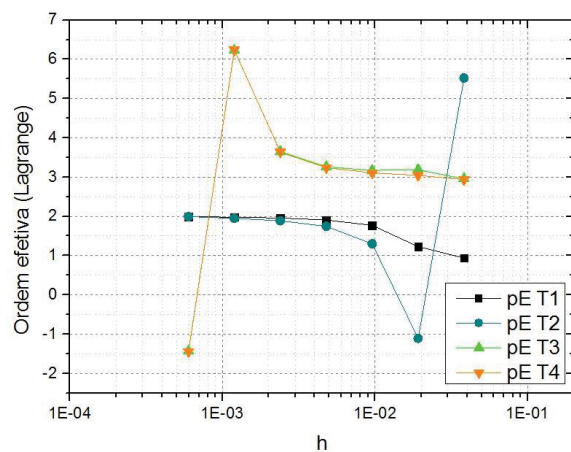


FIGURA 29 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

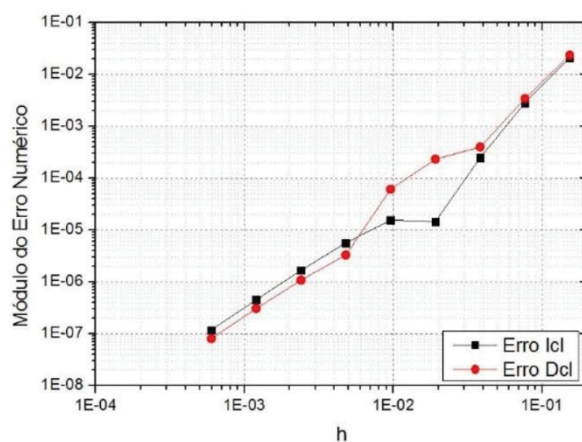


FIGURA 30 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

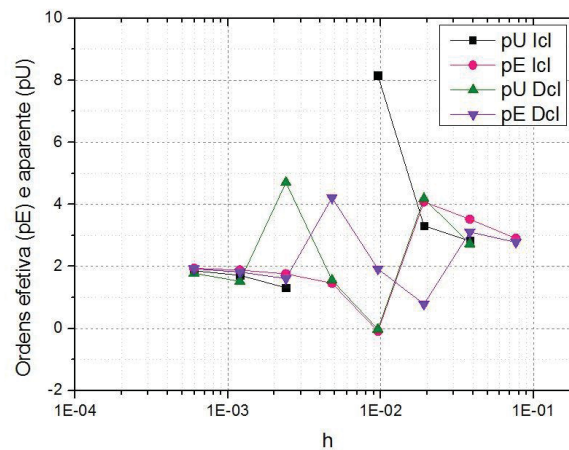
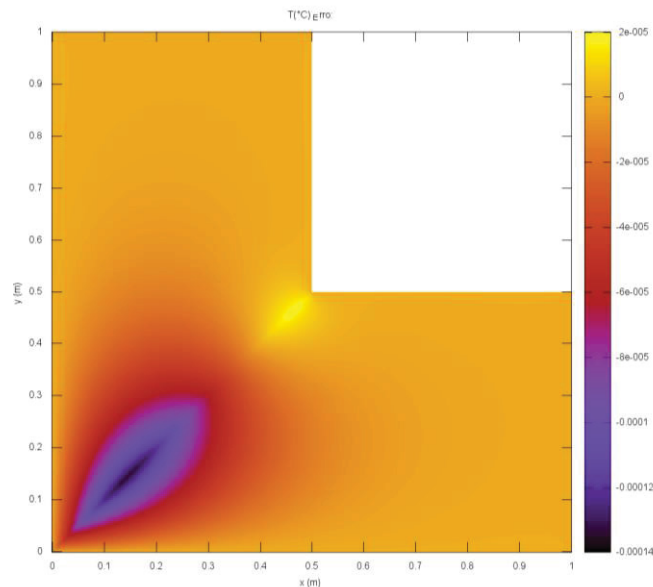


FIGURA 31 – CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÕES DE CONTO RNO DE DIRICHLET COM VOLUMES FICTÍCIOS.



### Elípticas

Já para as malhas geradas através de equações elípticas, tem-se a Fig. 33 em que se observa o módulo do erro numérico para as temperaturas internas dos quatro volumes internos e centrais analisados.

Em seguida, é feita a análise das ordens aparente (pU) e efetiva (pE) para os mesmos quatro volumes estudados. Para a ordem aparente, mostrado na Fig. 34, inicialmente observou-se uma tendência a 1 seguido de um comportamento não monotônico para os quatro volumes estudados.



FIGURA 32 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

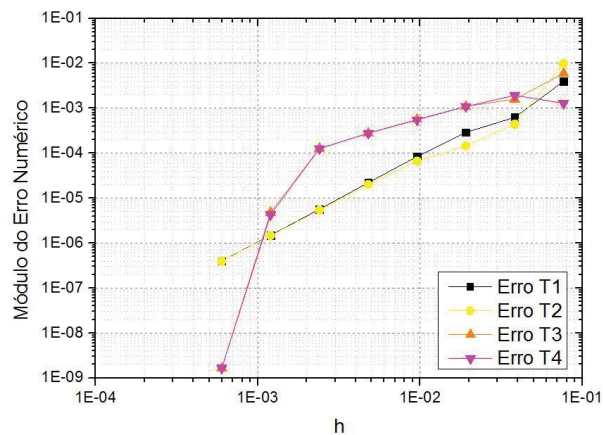
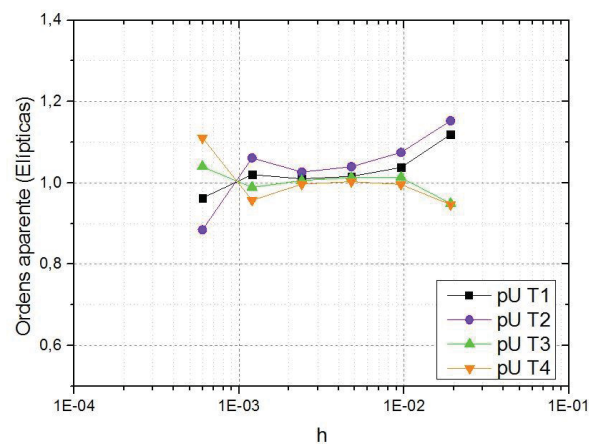


FIGURA 33 - ORDEM APARENTE BASEADA NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



Já para a ordem efetiva (FIGURA 35), observa-se uma tendência a 2 para os volumes T1 e T2; enquanto para os volumes T3 e T4, inicialmente há uma tendência à 1, seguido de um comportamento não monotônico.

Por fim, a Fig. 36 traz o módulo do erro numérico baseado na temperatura média e fluxo médio no contorno leste do domínio. Em seguida, a Fig. 37 com as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) para as mesmas variáveis de interesse. Observa-se para ambas ordens e variáveis de interesse há um comportamento semelhante. Inicialmente, há uma tendência a 1, seguido de um comportamento não monotônico.

Na Fig. 38 tem-se o campo de temperaturas baseado no erro numérico. Nota-se que a maior concentração do erro numérico é dada nos cantos da linha de simetria. Ou seja, na região onde  $x = y = 0$  e  $x = y = 0,5$ .

FIGURA 34 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

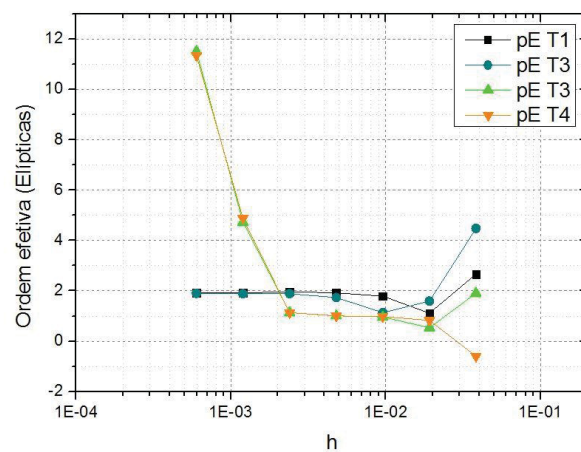


FIGURA 35 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA E NO FLUXO NA FACE LESTE.

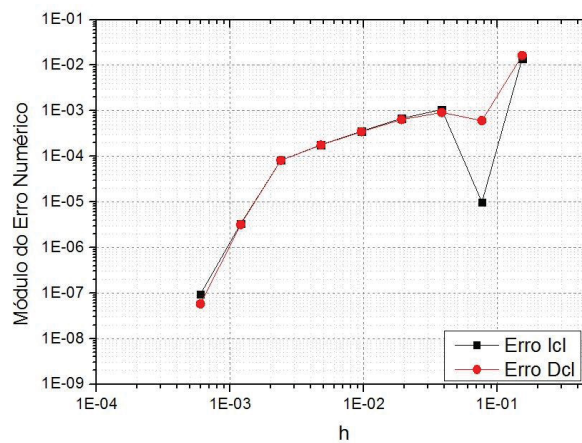


FIGURA 36 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

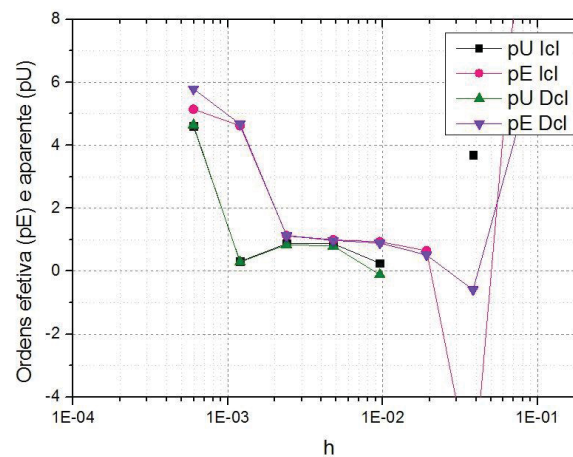
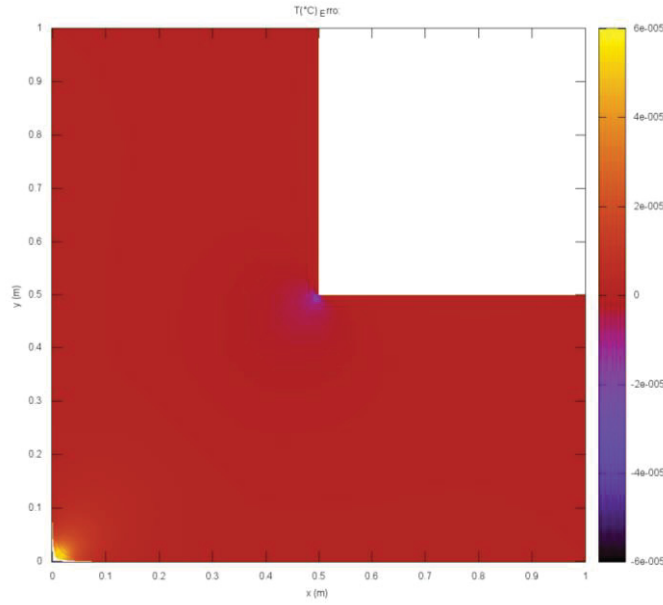




FIGURA 37 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTO RNO DE DIRICHLET PARA VOLUMES FICTÍCIOS.



#### 4.2.2 Condição de contorno de Neumann

Da mesma forma, os coeficientes calculados, por exemplo, para o contorno leste, são dados por

$$a_P = 1; a_W = 1 \quad (4.2)$$

$$a_N = a_{NW} = \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \frac{\beta_w}{\alpha_w} \quad (4.3)$$

$$a_S = a_{SW} = - \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \frac{\beta_w}{\alpha_w} \quad (4.4)$$

$$b_p = \frac{q''}{\Gamma^\theta} \frac{\Delta \xi}{J_W \alpha^{1/2}} \quad (4.5)$$

onde  $J$  é o Jacobiano da transformação, e  $\frac{q''}{\Gamma^\theta}$  é o fluxo calculado através da derivada da solução analítica para o contorno. Todas as variáveis foram calculadas com a norma do erro baseado no resíduo até que atinja o erro de máquina.

A Fig. 38 traz o módulo do erro numérico baseado na temperatura média para condição de contorno de Neumann com volumes fictícios. Enquanto a Fig. 39 ilustra as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) baseadas na temperatura média do domínio. Nota-se que para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange, as ordens dos erros tendem a 1, enquanto para as malhas geradas através de equações elípticas há um comportamento não monotônico.

FIGURA 38 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA VOLUMES FICTÍCIOS COM CONDIÇÕES DE CONTOURNO DE NEUMANN.

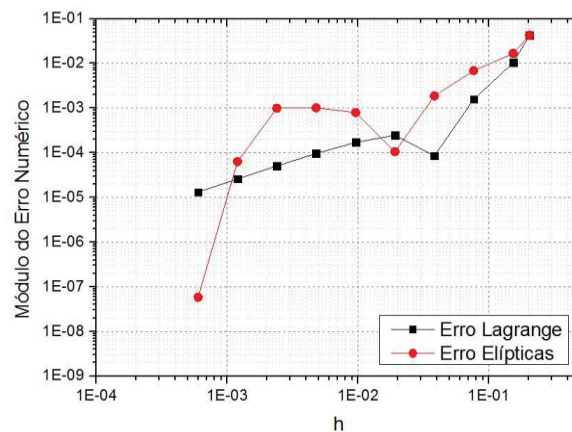
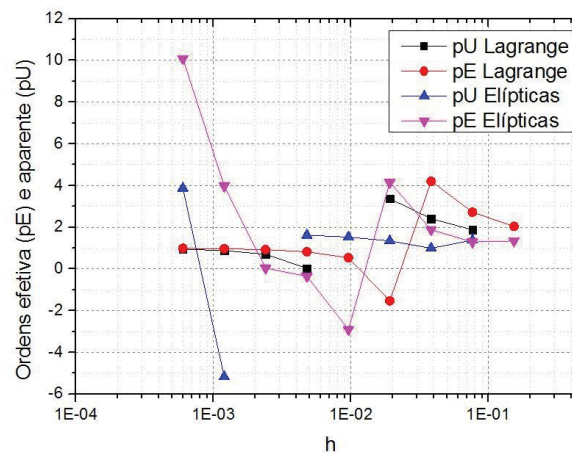


FIGURA 39 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE NEUMANN COM VOLUMES FICTÍCIOS.



### Lagrange

As próximas análises são realizadas para os volumes internos e centrais das malhas geradas através de interpolação de Lagrange utilizando a técnica dos volumes fictícios com condição de contorno de Neumann. A Fig. 40 ilustra os módulos dos erros numéricos para os quatro volumes internos e centrais do domínio.

Enquanto as Figs. 41 e 42 mostram as ordens aparente (pU) e efetiva (pE). Nota-se que a ordem aparente tende a 1, enquanto a ordem efetiva tende à 1,5.

FIGURA 40 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

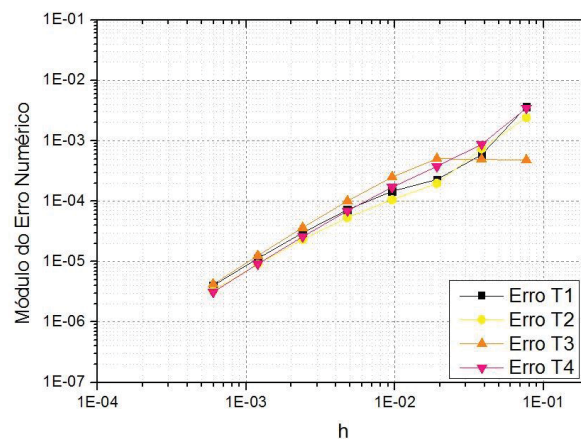


FIGURA 41 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

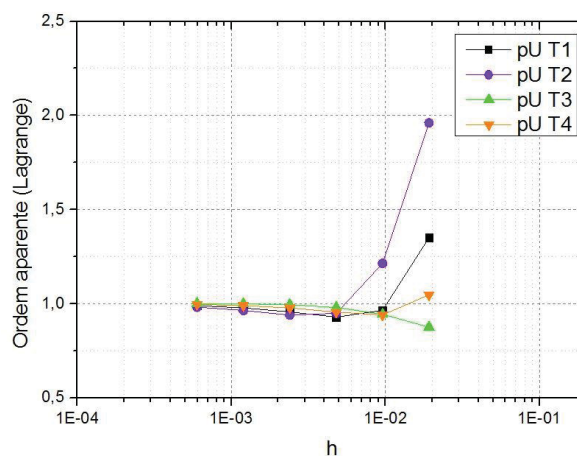
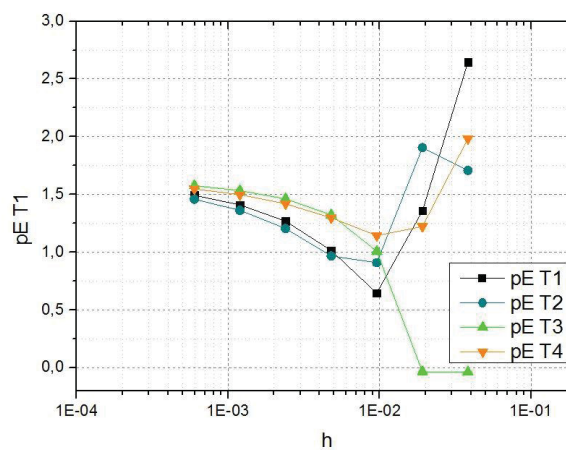


FIGURA 42 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



Em seguida, através da Fig. 43 tem-se o módulo do erro numérico para a temperatura média e o fluxo médio no contorno leste do domínio. Apesar do módulo do erro numérico decrescer conforme a malha é refinada, nota-se um comportamento não monotônico para as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para essas duas variáveis estudadas (FIGURA 44). Mais adiante, a Fig. 45 ilustra o campo de temperaturas do erro numérico, onde observa-se que a maior concentração do erro ocorre no degrau do domínio.

FIGURA 43 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

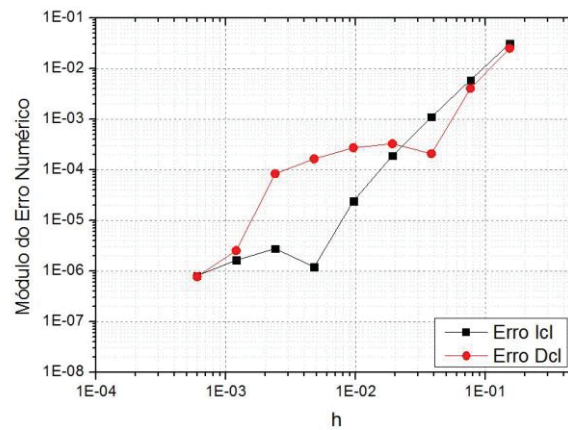


FIGURA 44 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

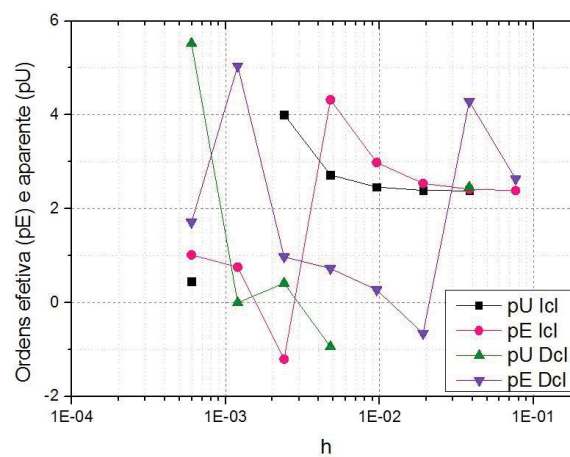
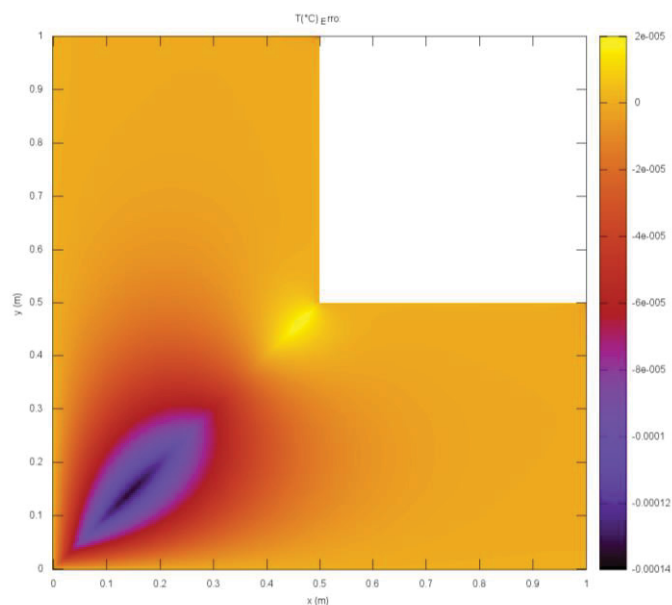


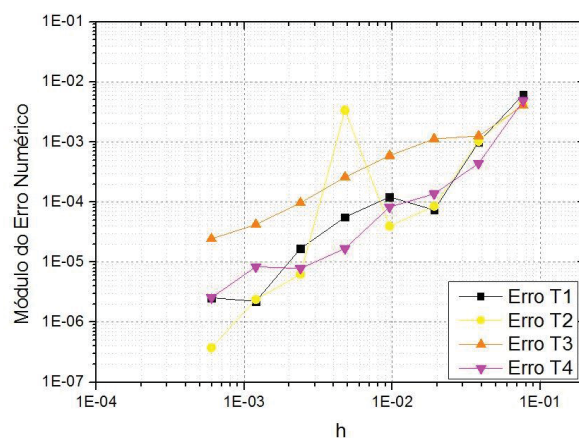
FIGURA 45 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÃO DE CONTO RNO DE NEUMANN COM VOLUMES FICTÍCIOS.



### Elípticas

Por fim, as análises foram feitas para as malhas geradas através de equações elípticas. A Fig. 46 compara o módulo do erro numérico entre os quatro volumes centrais e internos do domínio.

FIGURA 46 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



Mais adiante, as Figs. 47 e 48 comparam as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) para os quatro volumes estudados que são centrais e internos ao domínio. Observa-se que ambas ordens possuem comportamento não monotônico.

FIGURA 47 - ORDEM APARENTE (pU) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.

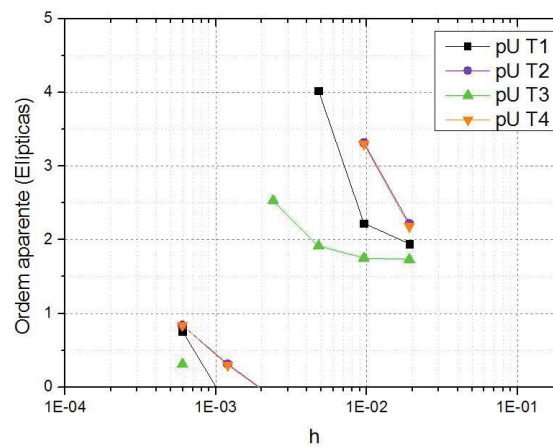
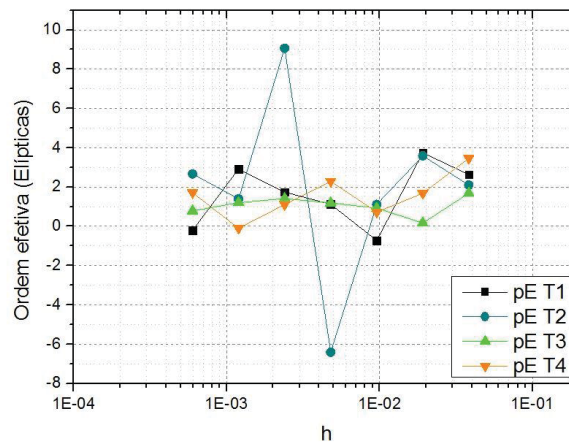


FIGURA 48 - ORDEM EFETIVA BASEADA NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.



A última análise das ordens envolve as médias das temperaturas e do fluxo no contorno leste. A Fig. 49 ilustra o módulo do erro numérico para tais variáveis. Em seguida, a Fig. 50 compara as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para tais variáveis. Nota-se um comportamento não monotônico para ambas ordens e variáveis. E por fim, a Fig. 51 o campo de temperaturas baseado no erro numérico, onde observa-se a maior concentração do erro nos cantos do domínio.



FIGURA 49 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA E FLUXO MÉDIO NO CONTORNO LESTE.

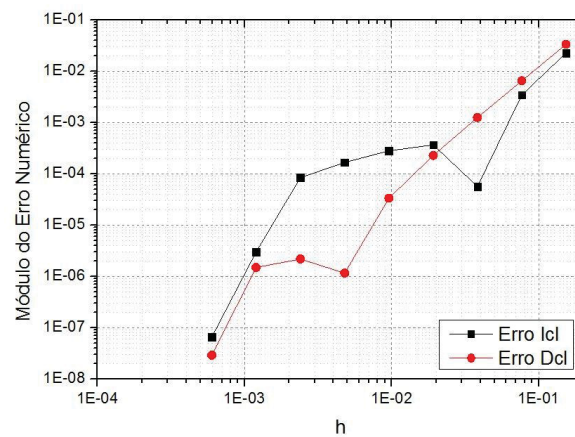


FIGURA 50 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA E FLUXO MÉDIO NO CONTORNO LESTE.

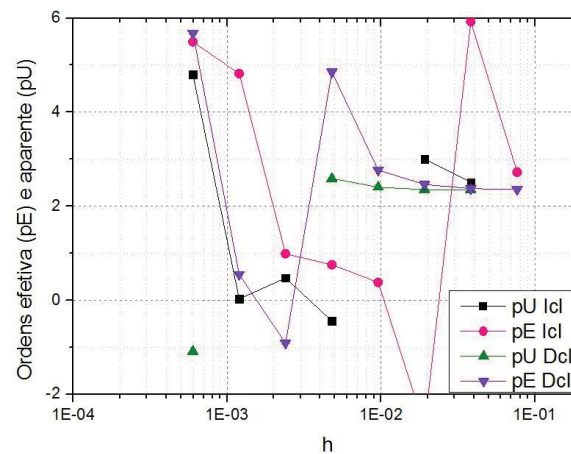
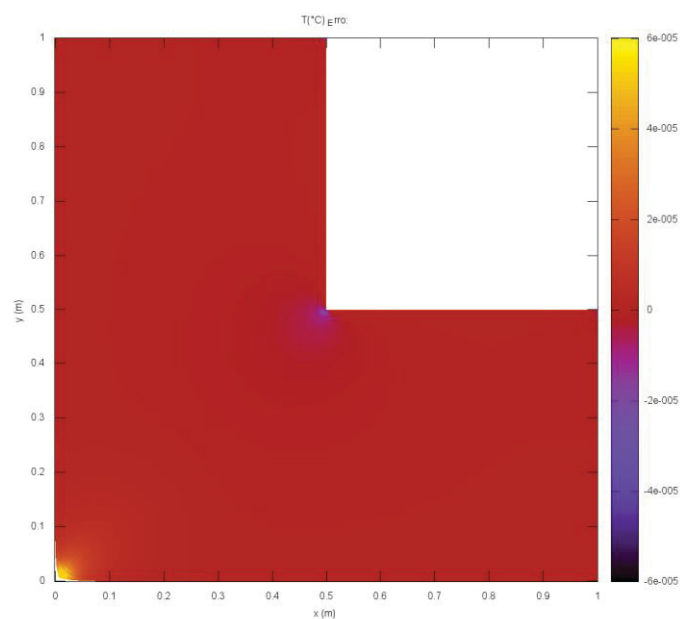


FIGURA 51 - CAMPO DE TEMPERATURAS DO ERRO NUMÉRICO PARA MALHAS ELÍPTICAS ATRAVÉS DE VOLUMES FICTÍCIOS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.



## 4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM BALANÇO DE VOLUMES

A segunda técnica estudada foi a de balanço de volumes na fronteira, onde há incorporação dos volumes dos contornos no domínio, e não há a utilização de volumes fictícios. Para esta técnica foram aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann para análises. Os resultados encontrados são apresentados a seguir.

### 4.2.1 Condição de contorno de Dirichlet

O primeiro estudo e análise com a técnica do balanço de volume foi realizada para condição de contorno de Dirichlet. Os coeficientes encontrados para o contorno, por exemplo, o contorno leste,

$$a_w = \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \beta_n}{3\Delta \xi} - \frac{J_s \alpha_s}{3\Delta \xi} \quad (4.6)$$

$$a_n = \frac{J_w \beta_w}{4\Delta \eta} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} \quad (4.7)$$

$$a_{nw} = \frac{J_w \beta_w}{4\Delta \eta} + \frac{J_n \beta_n}{3\Delta \xi} \quad (4.8)$$

$$a_s = -\frac{J_w \beta_w}{4\Delta \eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} \quad (4.9)$$

$$a_{sw} = -\frac{J_w \beta_w}{4\Delta \eta} - \frac{J_s \beta_s}{3\Delta \xi} \quad (4.10)$$

$$a_p = 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} + \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} \quad (4.11)$$



$$\begin{aligned}
b_p = & -\frac{S}{J} \Delta\xi \Delta\eta - T_{ne} \left( \frac{J_e \beta_e}{2 \Delta\eta} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta\xi} \right) + T_{se} \left( \frac{J_e \beta_e}{2 \Delta\eta} + \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta\xi} \right) \\
& - T_e \left( \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta\xi} - \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta\xi} - 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta\xi} \right)
\end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $a_w, a_n, a_{nw}, a_s, a_{sw}$  e  $a_p$  são os coeficientes,  $b_p$  é o termo fonte,  $T_{ne}, T_{se}$  e  $T_e$  são as temperaturas dos contornos prescritas e calculadas através da solução analítica. Também é necessário realizar a discretização para os volumes dos cantos, onde são obtidos diferentes coeficientes e termo fonte dos contornos (ver Apêndice B). Todas as análises ocorrem com até que a norma do erro baseado no resíduo atinja o erro de máquina.

A primeira variável de interesse estudada é a temperatura média do domínio. A Fig. 52 ilustra o módulo do erro numérico; já a Fig. 53 compara as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para a mesma variável de interesse. Observa-se que, para as ordens através das malhas geradas por interpolação de Lagrange, obtém-se um comportamento não monotônico; já para as malhas através de equações elípticas, inicialmente há uma tendência à aproximadamente 1,8 e depois um comportamento não monotônico.

FIGURA 52 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA BALANÇO DE VOLUMES COM CONDIÇÃO DE CONTOURO DE DIRICHLET.

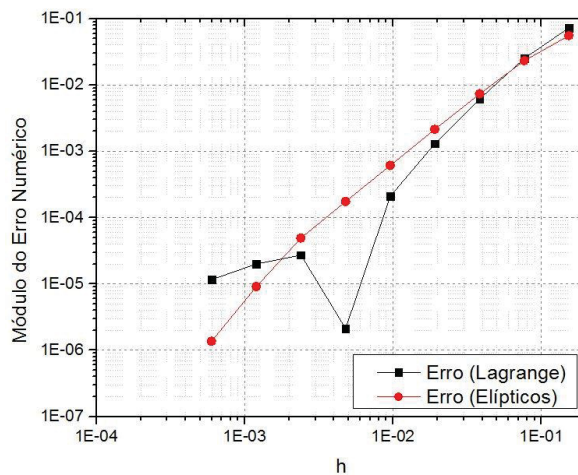
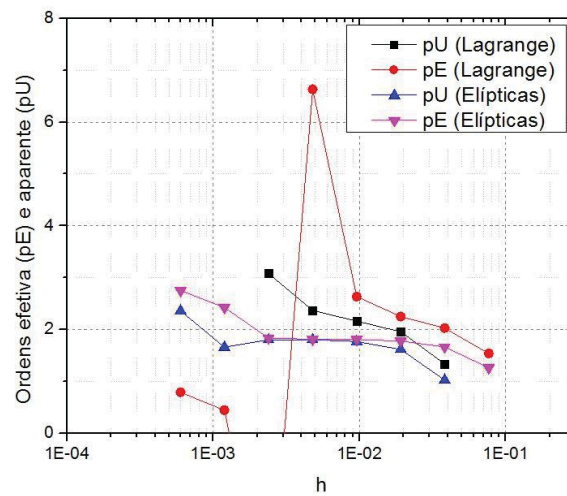


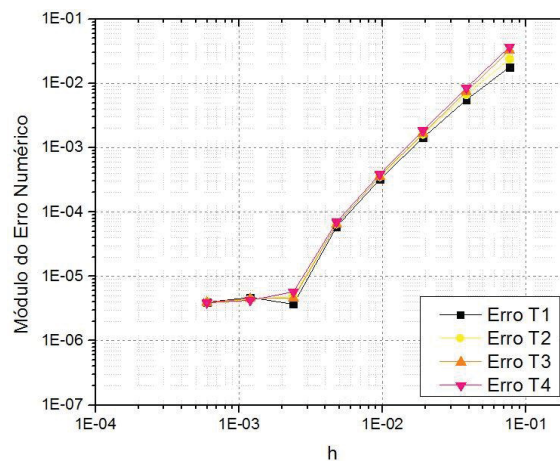
FIGURA 53 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTOURO DE DIRICHLET COM BALANÇO DE VOLUMES.



### Lagrange

Na Fig. 54 tem-se a primeira análise realizada para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange. Observa-se o módulo do erro numérico para os quatro volumes internos e centrais do domínio, com condição de contorno de Dirichlet para a técnica de balanço de volumes.

FIGURA 54 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



Em seguida, é realizada a análise para as ordens aparente (pU) e efetiva (pE), comparadas nas Figs. 55 e 56. Observa-se tendência ao valor 1 da ordem aparente, enquanto a ordem efetiva apresenta um comportamento não monotônico.

FIGURA 55 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

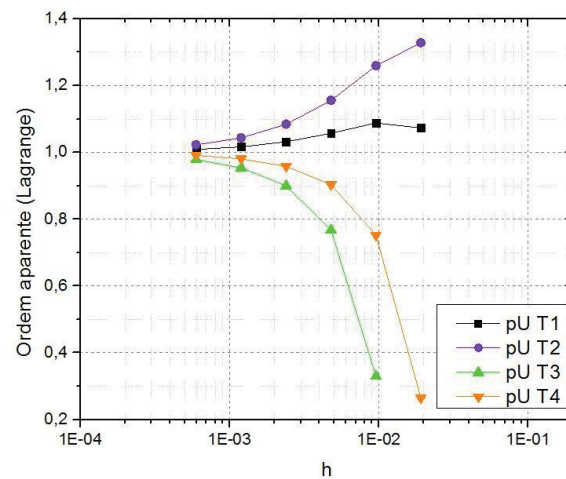
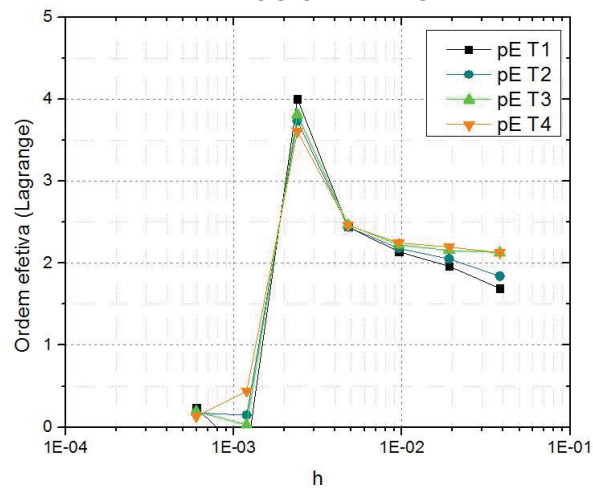


FIGURA 56 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



Depois, os próximos resultados obtidos ocorrem para a temperatura média e o fluxo médio no contorno leste. Sendo assim, a Fig. 57 representa o módulo do erro numérico para ambas variáveis, enquanto a Fig. 58 compara as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) para ambas variáveis estudadas. Observa-se então uma tendência ao valor 2 para ambas ordens.

Após esses resultados, tem-se o campo de temperaturas baseado no erro numérico do domínio (FIGURA 59). Observa-se que a concentração do erro numérico está no degrau da geometria do L.

FIGURA 57 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E NO FLUXO NA FACE LESTE.

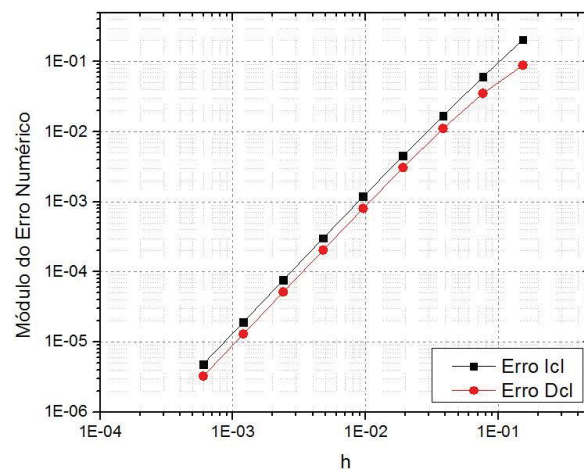


FIGURA 58 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA ICL E DCL.

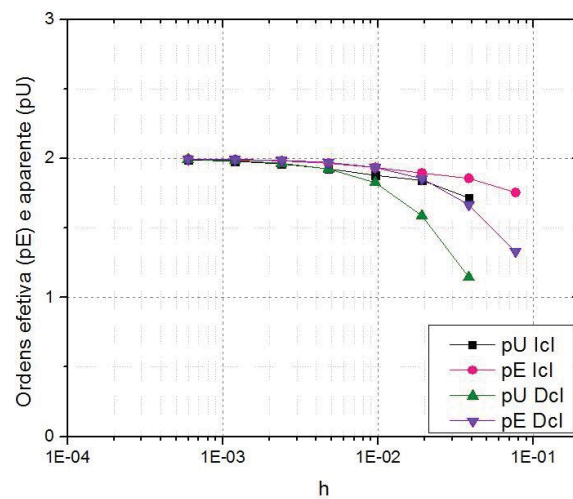
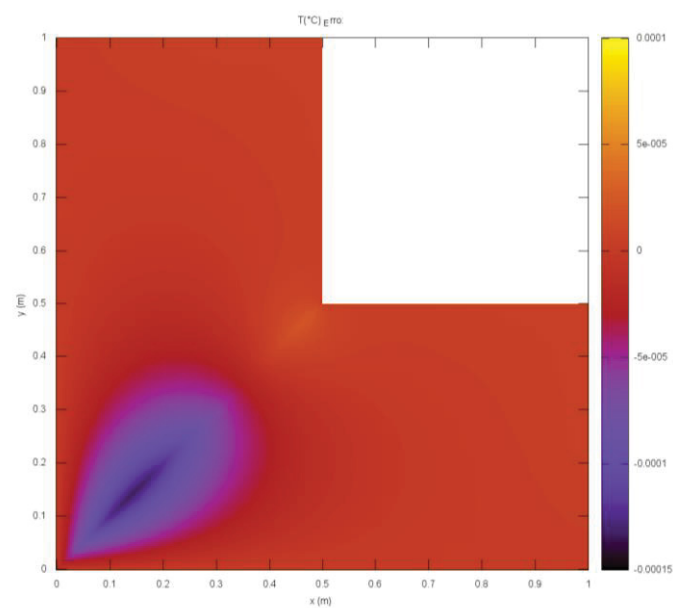


FIGURA 59 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE DIRICHLET PARA BALANÇO DE VOLUMES.



## Elípticas

Os próximos resultados obtidos são referentes às malhas geradas através de equações elípticas para condição de contorno de Dirichlet com a técnica do balanço de volumes. A Fig. 60 ilustra o módulo do erro numérico para as variáveis dos quatro volumes internos e centrais. Nas Figs. 61 e 62 tem-se as ordens aparente (pU) e efetiva (pE), respectivamente, para as mesmas variáveis, onde observa-se um comportamento não monotônico.

FIGURA 60 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

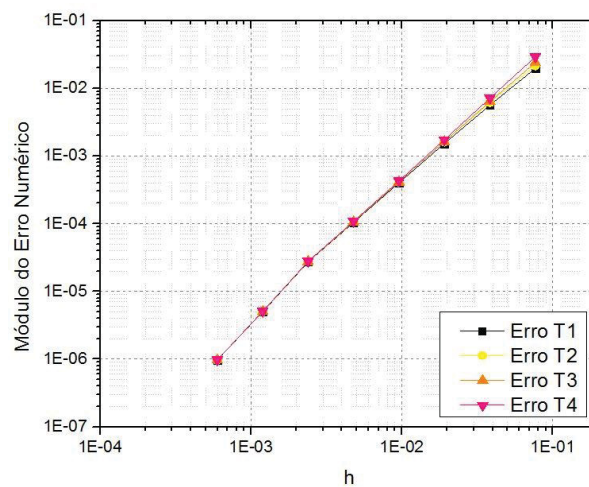
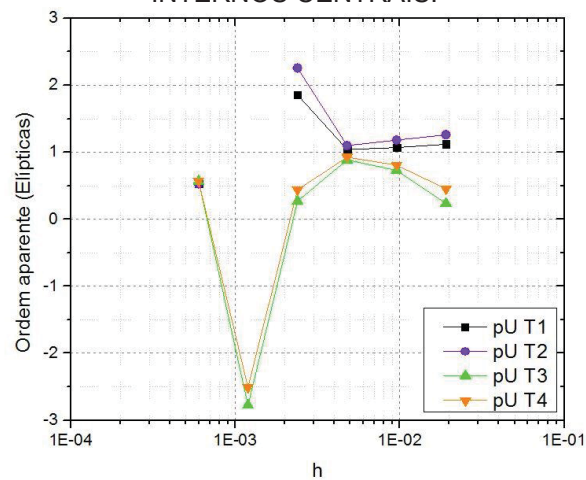


FIGURA 61 -ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



Na Fig. 63 tem-se o módulo do erro numérico para as últimas variáveis estudadas: a média da temperatura e do fluxo no contorno leste, onde observa-

se um comportamento não monotônico das ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para ambas as variáveis (FIGURA 64).

FIGURA 62 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

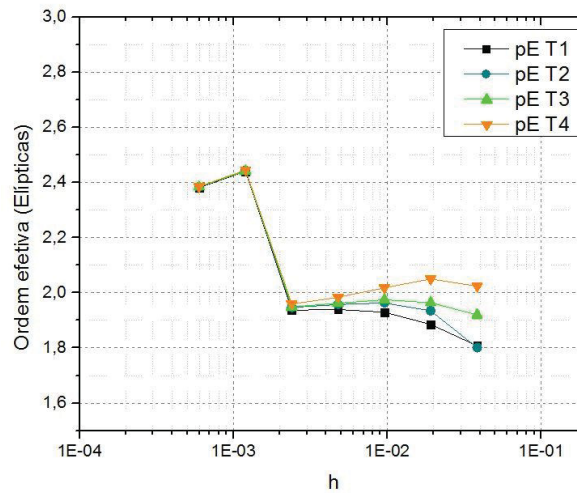
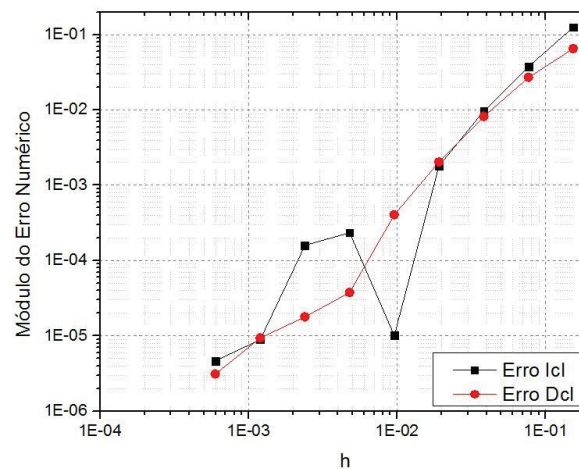


FIGURA 63 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.



Por fim, o campo de temperaturas do erro numérico (FIGURA 65), onde tem-se uma pequena concentração do erro nos cantos do domínio.



FIGURA 64 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA ICL E DCL.

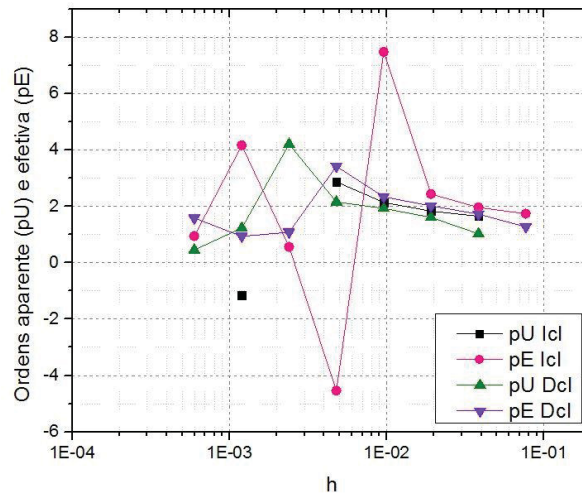
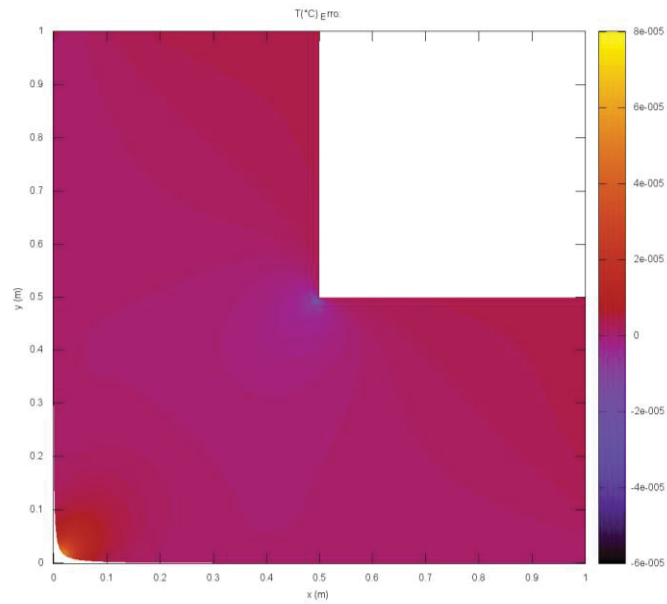


FIGURA 65 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTOURO DE DIRICHLET PARA BALANÇO DE VOLUMES.



#### 4.2.2 Condição de contorno de Neumann

Utilizando a mesma técnica de balanço de volumes, aplicou-se a condição de contorno de Neumann. Os coeficientes obtidos e o termo fonte, para o contorno leste, por exemplo, são dados por

$$a_w = \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \beta_n}{3\Delta \xi} - \frac{J_s \beta_s}{3\Delta \xi} \quad (4.13)$$

$$a_n = \frac{J_w \beta_w}{4\Delta\eta} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta\eta} - \frac{J_n \beta_n}{3\Delta\xi} \quad (4.14)$$

$$a_{nw} = \frac{J_w \beta_w}{4\Delta\eta} + \frac{J_n \beta_n}{3\Delta\xi} \quad (4.15)$$

$$a_s = -\frac{J_w \beta_w}{4\Delta\eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta\eta} + \frac{J_s \beta_s}{3\Delta\xi} \quad (4.16)$$

$$a_{sw} = -\frac{J_w \beta_w}{4\Delta\eta} - \frac{J_s \beta_s}{3\Delta\xi} \quad (4.17)$$

$$a_p = \frac{J_n \beta_n}{3\Delta\xi} + \frac{J_w \alpha_w}{\Delta\xi} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta\eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta\eta} - \frac{J_s \beta_s}{3\Delta\xi} \quad (4.18)$$

$$b_p = -\frac{S}{J} \Delta\xi \Delta\eta \quad (4.19)$$

onde  $a_w$ ,  $a_n$ ,  $a_{nw}$ ,  $a_s$ ,  $a_{sw}$  e  $a_p$  são os coeficientes e  $b_p$  é o termo fonte. De maneira análoga às anteriores, a solução foi obtida com norma do erro até que atinja o erro de máquina. E em seguida, a análise da primeira variável estudada, ou seja, a temperatura média do domínio. Onde nas Fig. 66 e 67 observa-se o módulo do erro numérico e as ordens efetiva (pE) e aparente (pU), respectivamente. Observa-se uma tendência entre 1 e 1,5 entre as quatro ordens para ambas as malhas estudadas.

FIGURA 66 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA BALANÇO DE VOLUMES COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.

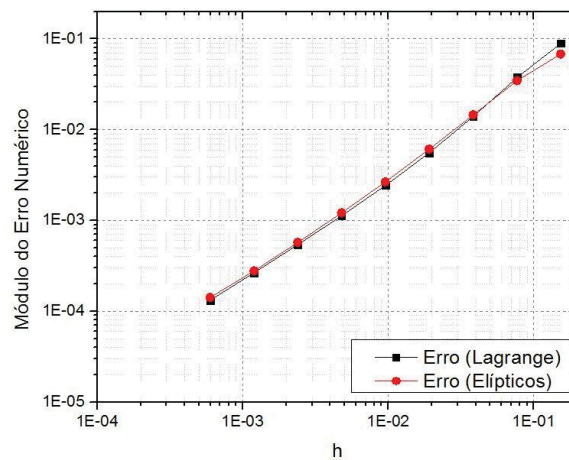
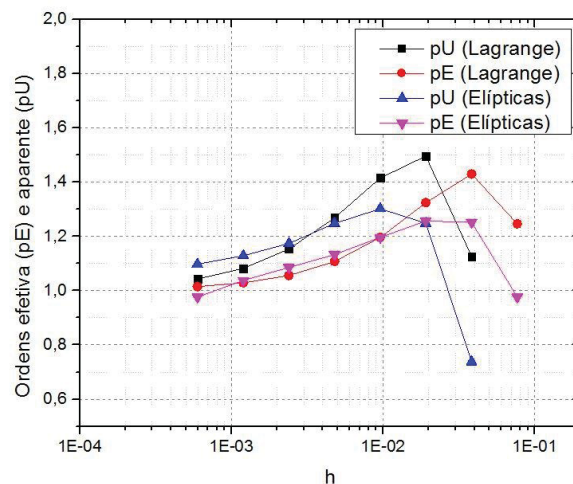




FIGURA 67 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTOURO DE NEUMANN COM BALANÇO DE VOLUMES.



### *Lagrange*

Para as outras variáveis estudadas, inicialmente considerou-se a malha gerada através de interpolação de Lagrange, e os resultados são apresentados a seguir. Na Fig. 68 tem-se o módulo do erro numérico para os quatro volumes internos e centrais do domínio.

Nas Figs. 69 e 70 as ordens aparente (pU) e efetiva (pE), respectivamente, onde observa-se que há uma tendência à 1 para ambas as ordens. As Figs. 71 e 72 referem-se ao módulo do erro numérico e as ordens efetiva (pE) e aparente (pU), respectivamente, para as últimas variáveis estudadas, ou seja, a temperatura média e o fluxo no contorno leste. Onde também, assim como para os volumes internos, observa-se que há uma tendência à 1 em relação as ordens.

E em seguida, o campo de temperaturas do erro numérico (FIGURA 73), onde é possível observar que a maior concentração do erro numérico ocorre nas faces oeste e leste, onde foram as aplicadas a condição de contorno de Neumann. Também, existe uma pequena concentração do erro no degrau do domínio.

FIGURA 68 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

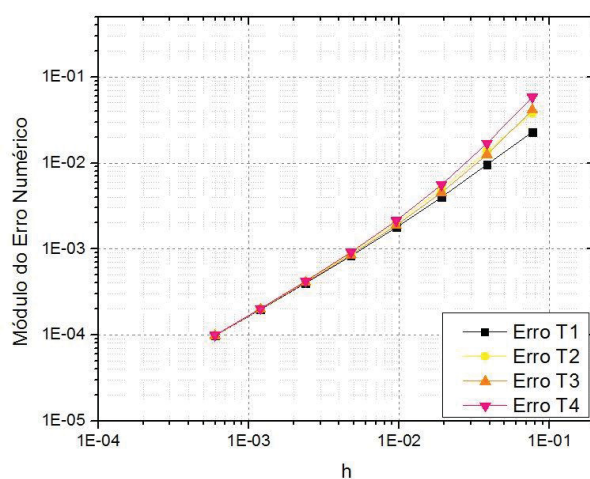


FIGURA 69 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

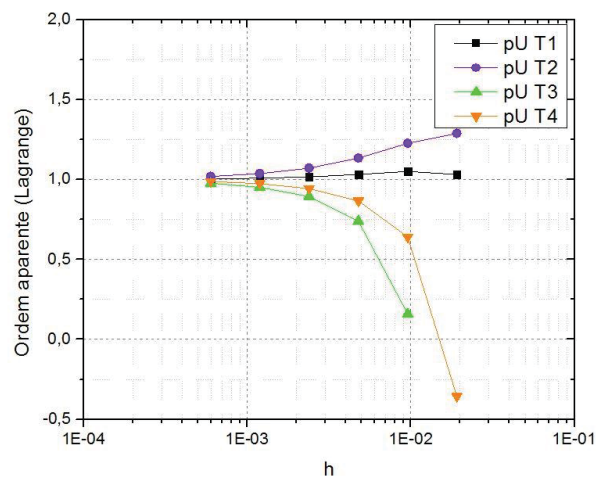


FIGURA 70 - ORDEM EFETIVA BASEADA NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

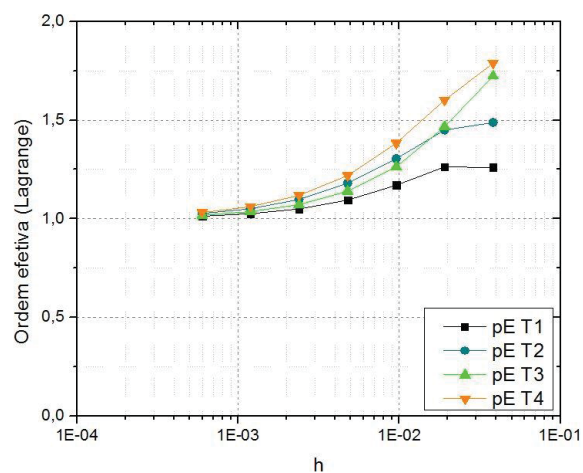


FIGURA 71 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NO CONTORNO LESTE.

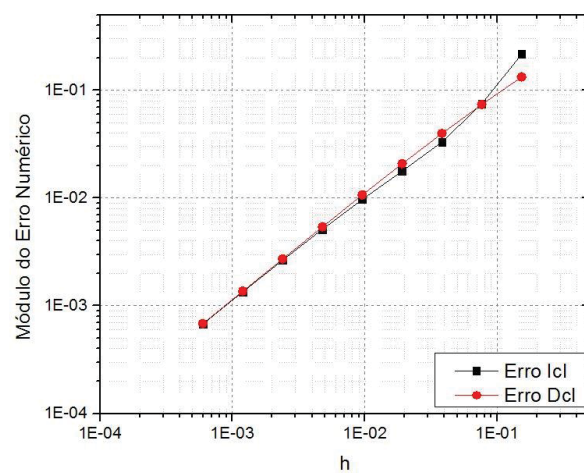


FIGURA 72 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

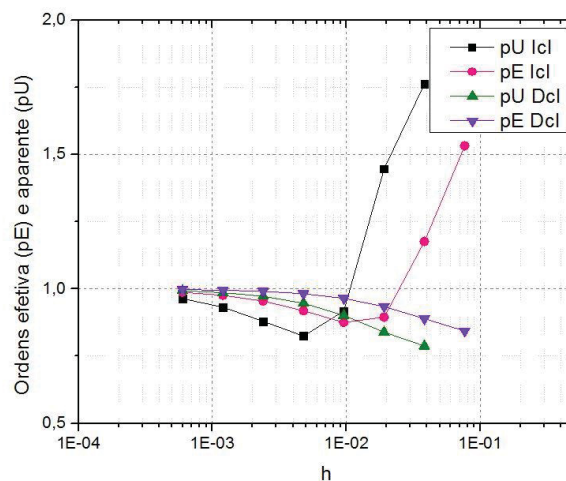
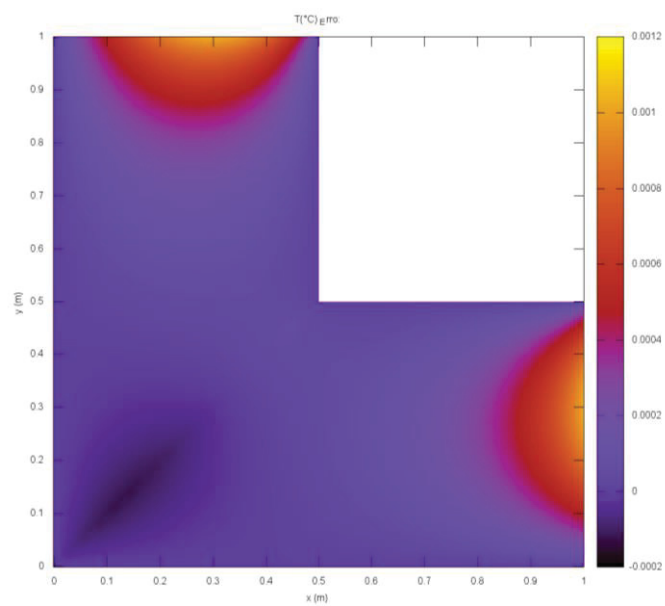


FIGURA 73 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN PARA BALANÇO DE VOLUMES.



## Elípticas

Para a técnica de balanço de volumes, o último estudo foi realizado para as malhas geradas através de equações elípticas com as condição de contorno de Neumann. Assim, como visto anteriormente, a primeira análise é realizada para os quatro volumes internos e centrais no domínio, onde na Fig. 74 observa-se o módulo do erro numérico para os mesmos volumes.

Seguido das Figs. 75 e 76 onde há comparação das ordens aparente (pU), que possui uma tendência não monotônica, e efetiva (pE), onde há uma tendência à aproximadamente 1,3 para os mesmos volumes.

FIGURA 74 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

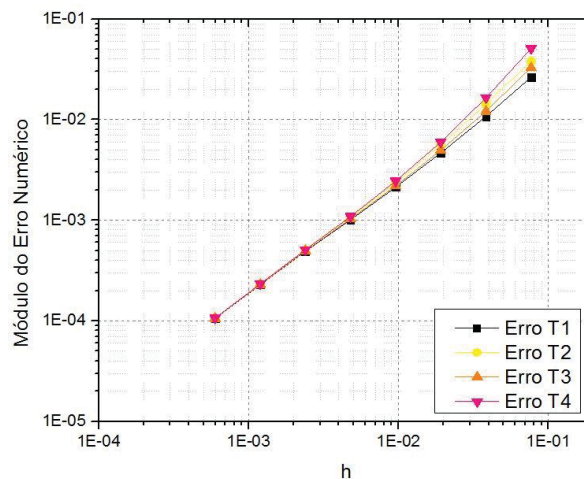
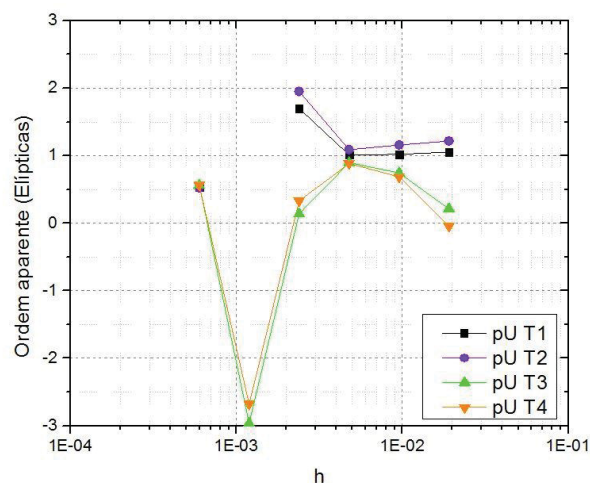


FIGURA 75 - ORDEM APARENTE BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



Por fim, a análise realizada para a temperatura média e o fluxo médio no contorno leste. O módulo do erro numérico obtido para ambas variáveis é

ilustrado na Fig. 77, enquanto as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) pela Fig. 78. Observa-se uma tendência a aproximadamente 1 para ambas as variáveis.

FIGURA 76 - ORDEM EFETIVA BASEADO NAS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

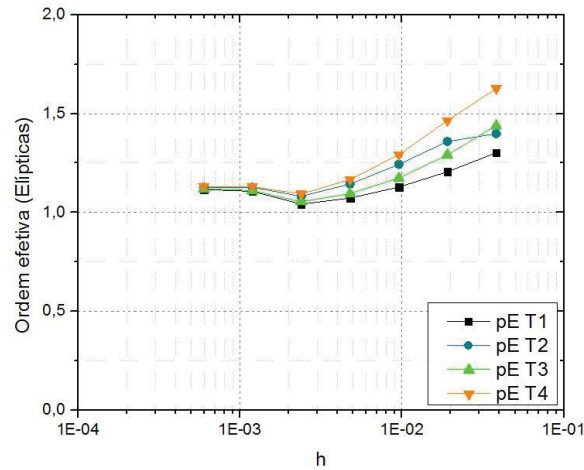
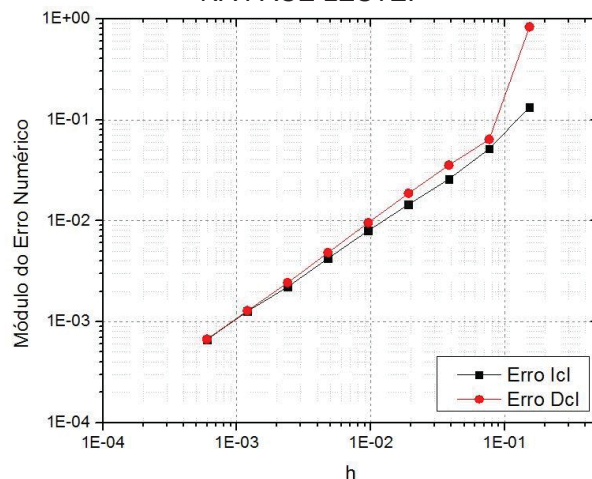


FIGURA 77 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.



Enquanto a Fig. 79 representa o campo de temperaturas do erro numérico. Observa-se como na malha gerada através de interpolação de Lagrange, uma concentração do erro numérico nas faces oeste e leste, onde foi aplicada a condição de contorno Neumann. Entretanto, observa-se também que não existe a concentração do erro no degrau do domínio, ficando assim o erro concentrado somente nos contornos oeste e leste.

FIGURA 78 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

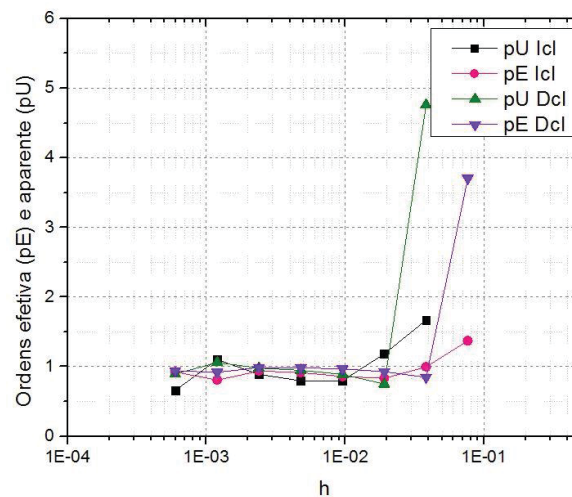
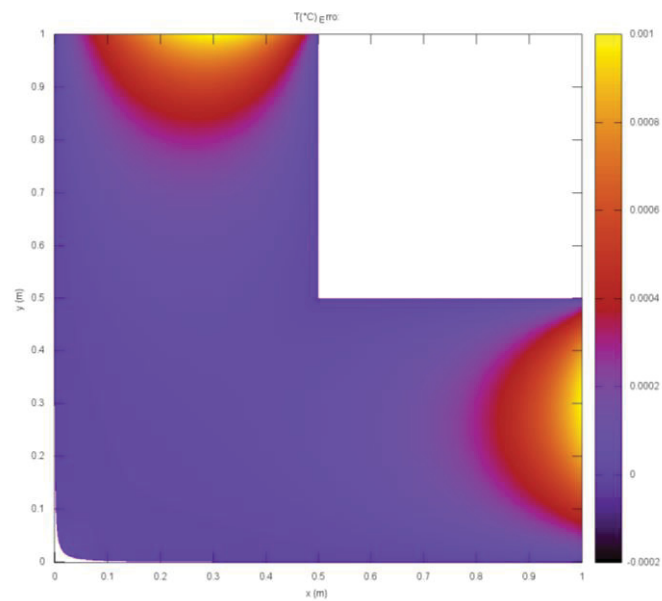


FIGURA 79 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN PARA BALANÇO DE VOLUMES.



#### 4.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO

A última técnica aplicada à geometria do L com as condições de contorno de Dirichlet e Neumann foi a de volumes de espessura zero. A seguir, são mostrados os resultados obtidos para as análises das variáveis consideradas para estudo.



#### 4.3.1 Condição de contorno de Dirichlet

Inicialmente, aplicou-se a técnica de volumes de espessura zero para a condição de contorno de Dirichlet. Os coeficientes e termo fonte obtidos, para um contorno leste, por exemplo

$$a_p = 1; b_p = T_e \quad (4.20)$$

sendo  $T_e$  a temperatura prescrita no contorno e calculada através da solução analítica. As análises foram feitas com a norma do erro baseado no resíduo até que atingisse o erro de máquina.

As Figs. 80 e 81 ilustram o módulo do erro numérico e as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para a variável da temperatura média no domínio, respectivamente. Observa-se uma tendência à 1 para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange, e uma tendência não monotônica para as malhas geradas através de equações elípticas.

FIGURA 80 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET.

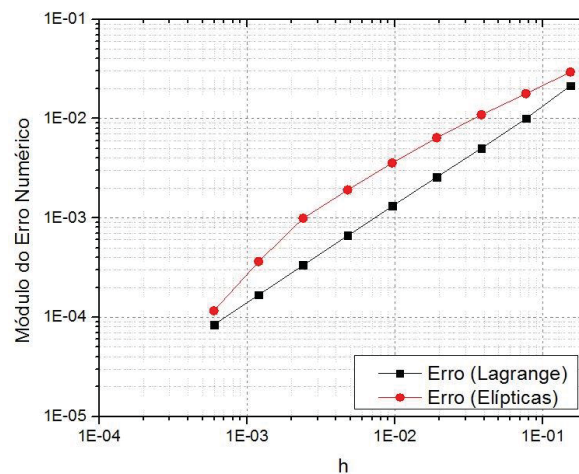
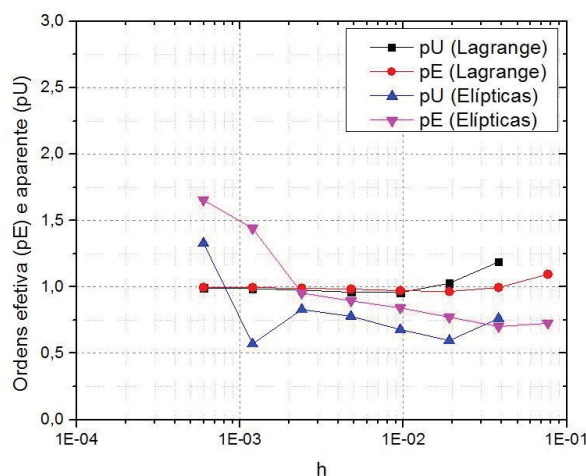


FIGURA 81 - ORDENS EFETIVA E APARENTE BASEADOS NA TEMPERATURA MÉDIA PARA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.



### Lagrange

Inicialmente, aplicando a condição de contorno de Dirichlet, a análise foi realizada para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange. Assim, a Fig. 82 representa o módulo do erro numérico para os volumes internos e centrais do domínio.

Tem-se as ordens aparente (pU) (FIGURA 83) efetiva (pE) (FIGURA 84) para os mesmos volumes. Observa-se que ambas as ordens possuem uma tendência a aproximadamente 1 para os volumes internos.

As próximas variáveis estudadas são a temperatura média e o fluxo médio no contorno leste. A Fig. 85 mostra o módulo do erro numérico, enquanto a Fig. 86 compara as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para ambas variáveis. Nota-se através da Fig. 86 que as ordens para a temperatura média e o fluxo no contorno leste tem tendência a aproximadamente 1,8. Mais adiante, tem-se a representação do campo do erro numérico (FIGURA 87), onde observa-se uma concentração do erro numérico maior nas proximidades dos contornos sul e norte.



FIGURA 82 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS TEMPERATURAS DOS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS,

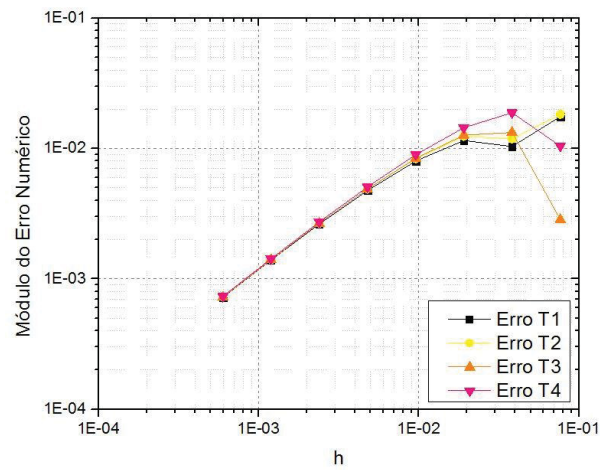


FIGURA 83 - ORDEM APARENTE PARA OS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

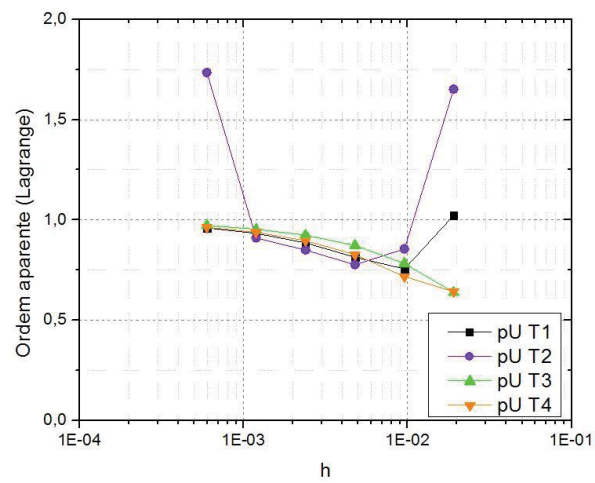


FIGURA 84 - ORDEM EFETIVA PARA OS VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

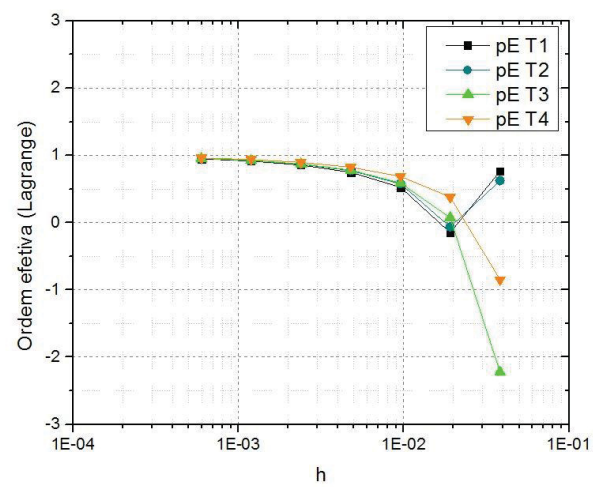


FIGURA 85 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

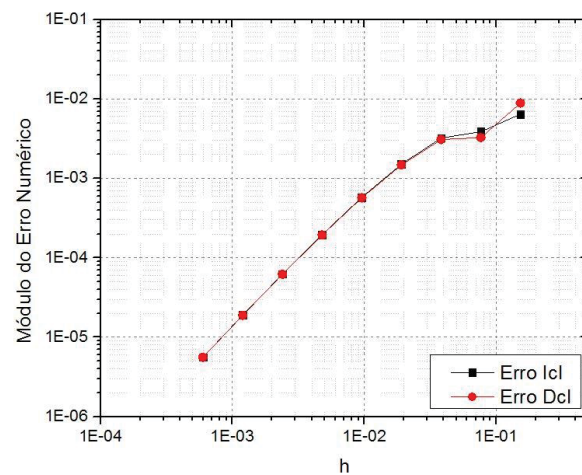


FIGURA 86 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

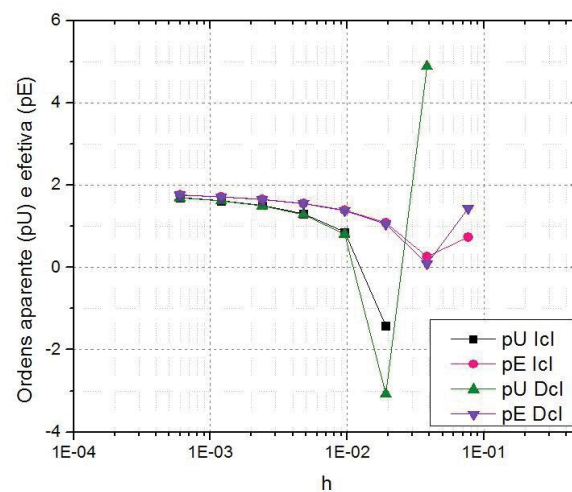
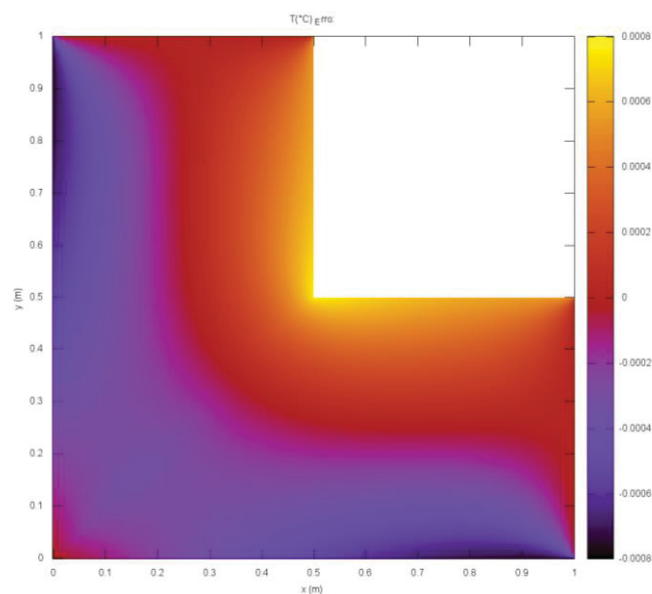


FIGURA 87 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.



## Elípticas

Em um segundo momento, foram realizados os estudos para a condição de contorno de Dirichlet aplicada através da técnica de volumes de espessura zero com as malhas geradas por equações elípticas.

Assim, a Fig. 88 mostra o módulo do erro numérico para os quatro volumes internos e centrais estudados. E as Figs. 89 e 90 comparam as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) para os mesmos quatro volumes. Nota-se, que a ordem aparente (pU) possui uma tendência não monotônica; já a ordem efetiva (pE) tende a 1.

FIGURA 88 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

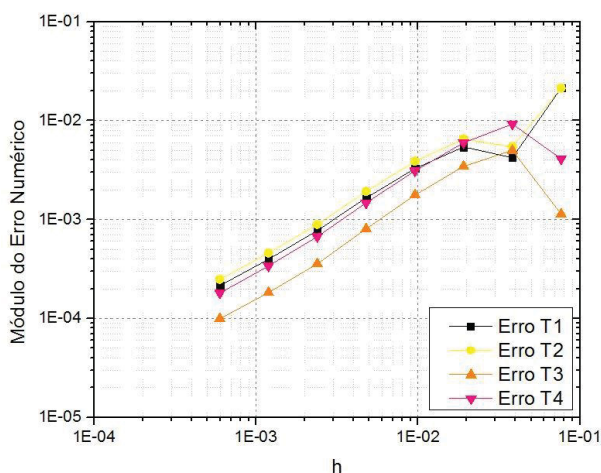
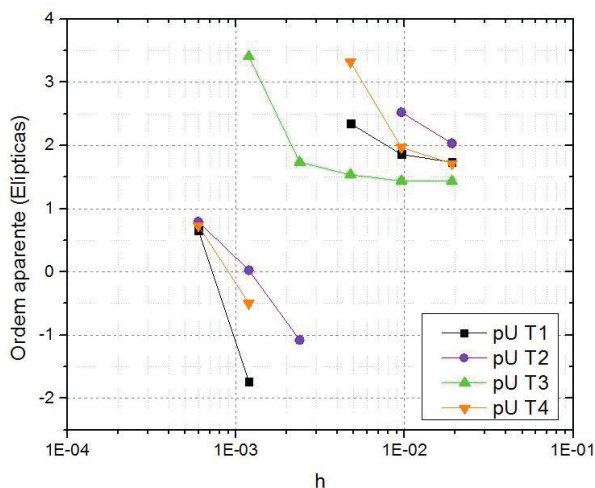


FIGURA 89 - ORDEM APARENTE PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



Os últimos resultados obtidos para análise de ordem são para as variáveis da temperatura média e fluxo no contorno leste. A Fig. 91 traz o módulo do erro numérico para ambas variáveis. Já as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) são comparadas na Fig. 92, onde observa-se através dos resultados que

há uma tendência inicialmente à aproximadamente 1,2 seguido de um comportamento não monotônico conforme a malha fica mais fina.

FIGURA 90 - ORDEM EFETIVA PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

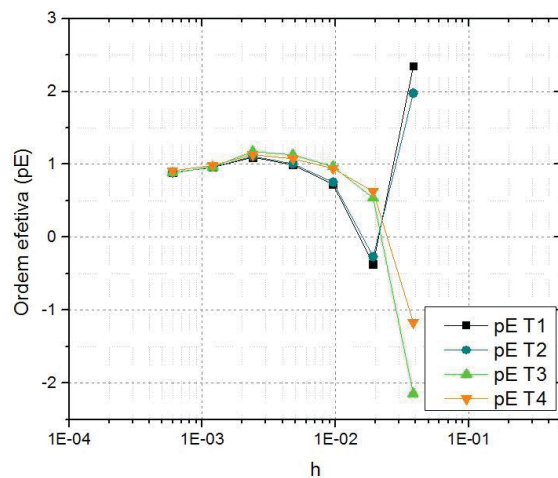


FIGURA 91 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

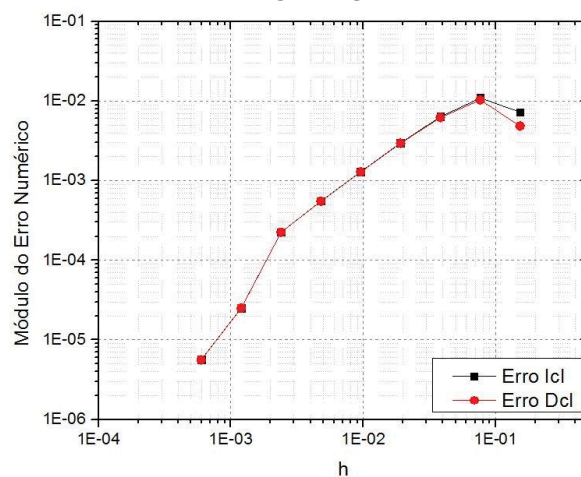
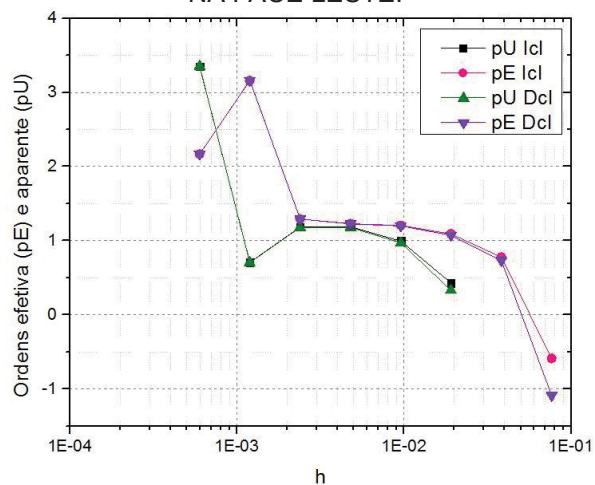
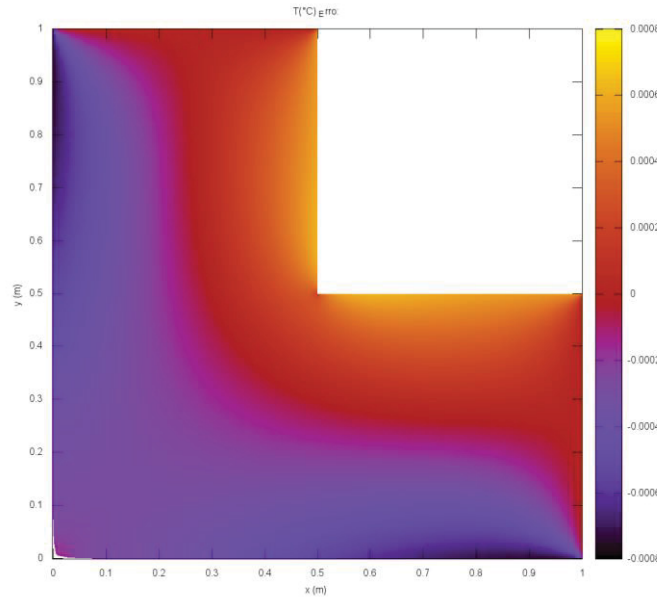


FIGURA 92 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.



A Fig. 93 ilustra o campo de temperaturas do erro numérico. Observa-se uma concentração do erro nas proximidades dos contornos sul e norte.

FIGURA 93 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE DIRICHLET PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.



#### 4.3.2 Condição de contorno de Neumann

A última análise realizada para a geometria do L foi a aplicação da condição de contorno de Neumann através da técnica de volumes de espessura zero. Para isso, os coeficientes e termo fonte obtidos, por exemplo para o contorno leste, são dados por

$$a_p = 1; a_w = 1; b_p = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.21)$$

onde  $a_p$  e  $a_w$  são os coeficientes;  $b_p$  é o termo fonte e representa o fluxo prescrito no contorno, ou seja, a derivada da solução analítica. Analogamente ao que foi visto anteriormente, as análises foram feitas para a norma do erro até o erro de máquina, e a primeira variável estudada foi a temperatura média no domínio. A Fig. 94 mostra o módulo do erro numérico para ambos os tipos de malha, e a Fig. 95 compara as ordens efetiva (pE) e aparente (pU).

Observa-se um comportamento não monotônico quando se trata das malhas geradas através de equações elípticas, enquanto para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange, há um tendência a 1.

FIGURA 94 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.

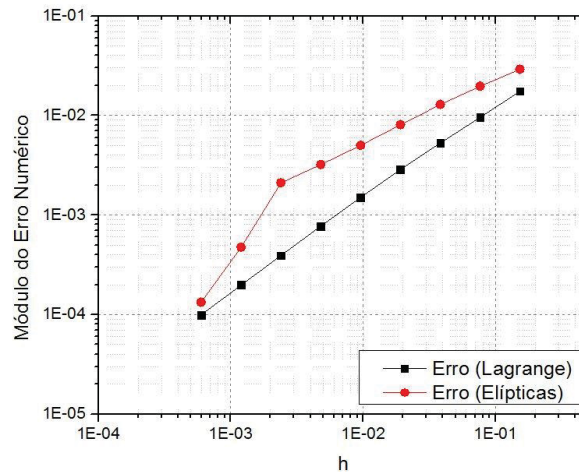
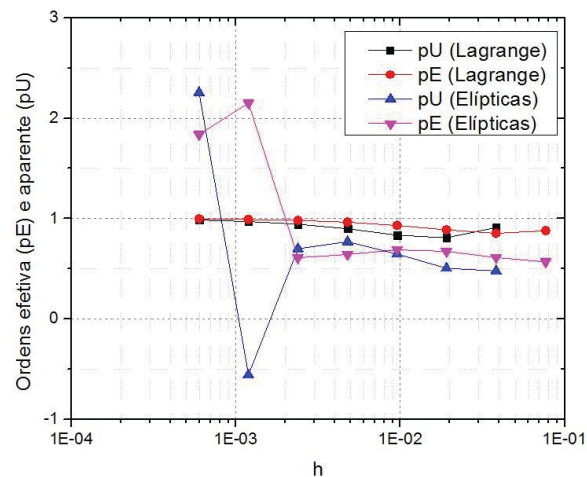


FIGURA 95 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA TEMPERATURA MÉDIA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.



### Lagrange

Em seguida, considerando as malhas geradas através de interpolação de Lagrange, foi estudado os volumes centrais ao domínio, e deste modo, a Fig. 96 ilustra o módulo do erro numérico para os quatro volumes escolhidos. E mais adiante, observa-se uma tendência a 1 para as ordens aparente (pU) (FIGURA 97) e efetiva (pE) (FIGURA 98) para os mesmos volumes internos e centrais ao domínio.



FIGURA 96 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

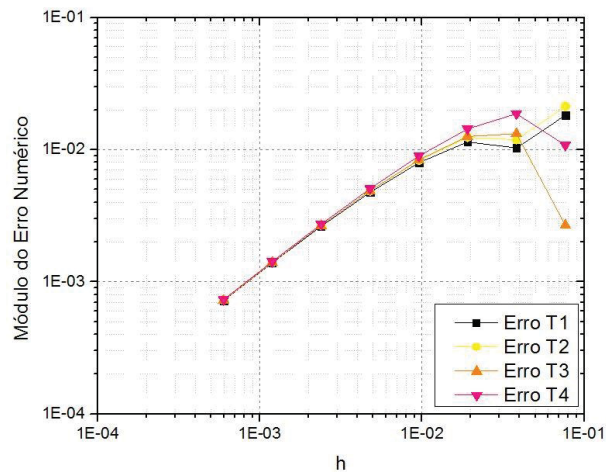


FIGURA 97 - ORDEM APARENTE PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

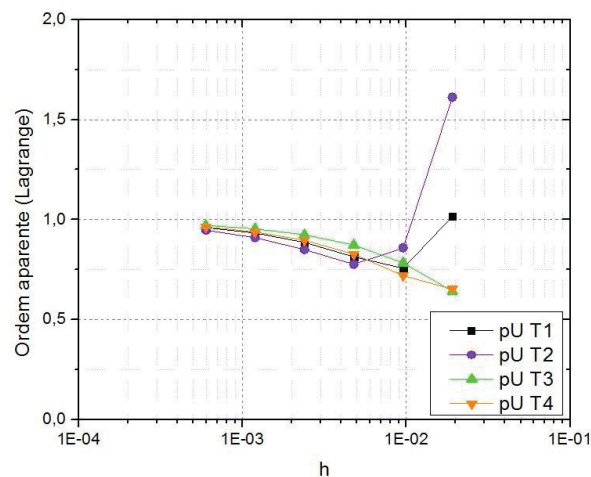
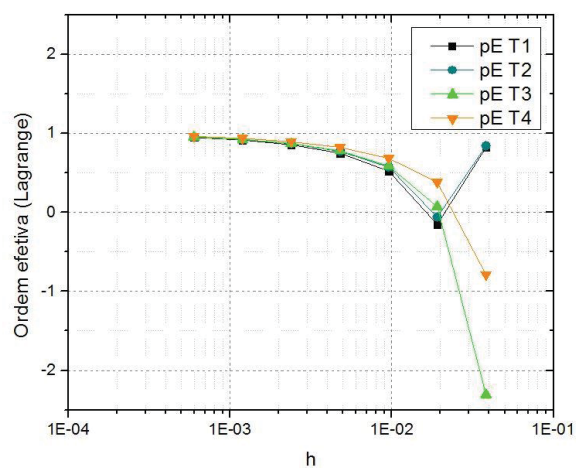


FIGURA 98 - ORDEM EFETIVA PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.



O último estudo realizado foi feito para a temperatura média e fluxo na face leste. Assim, são apresentados o módulo do erro numérico para ambas variáveis (FIGURA 99), e também, as ordens efetiva (pE) e aparente (pU)

(FIGURA 100), onde foi obtido que as ordens tendem a 1 conforme a malha é refinada.

FIGURA 99 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.

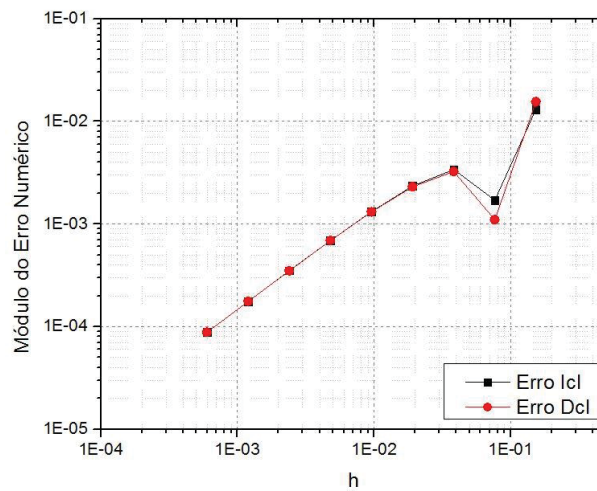
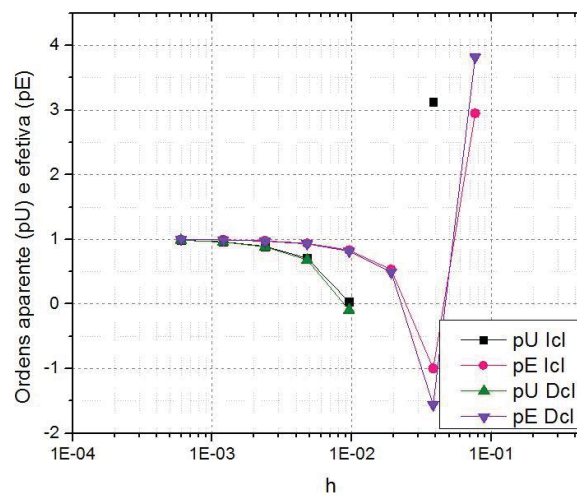


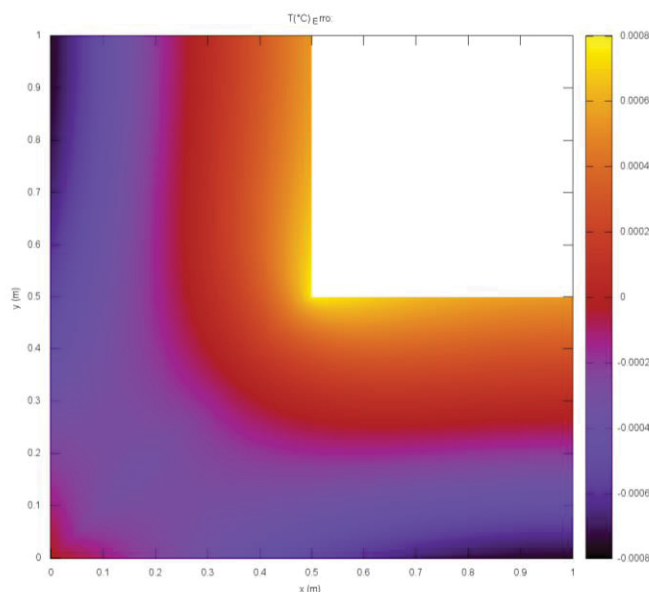
FIGURA 100 - ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NA FACE LESTE.



Por fim, a Fig. 101 mostra o campo de temperaturas do erro numérico, onde analogamente ao que foi apresentado anterior, há uma maior concentração do erro numérico na região dos contornos sul e norte.



FIGURA 101 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA LAGRANGE COM CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE NEUMANN PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.



### *Elípticas*

O último estudo realizado envolvendo a geometria do L, foi a aplicação da condição de contorno de Neumann através da técnica de volumes de espessura zero para as malhas geradas através de equações elípticas. Assim, de maneira análogo ao que foi realizado anteriormente, tem-se inicialmente o módulo do erro numérico para os quatro volumes internos e centrais ao domínio estudados.

Em seguida, a análise das ordens aparente (pU) e efetiva (pE) para os mesmos quatro volumes. Através do estudo, observou-se que a ordem aparente apresenta comportamento não monotônico, enquanto a ordem efetiva tende à 1.

E o último estudo realizado para a média da temperatura e do fluxo no contorno leste, onde analisou-se inicialmente o módulo do erro numérico (FIGURA 105), e em seguida, as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) (FIGURA 106) para ambas as variáveis, onde foi observado um comportamento não monotônico para ambas as ordens e variáveis. Por fim, o campo de temperaturas do erro numérico representado pela Fig. 107.

FIGURA 102 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

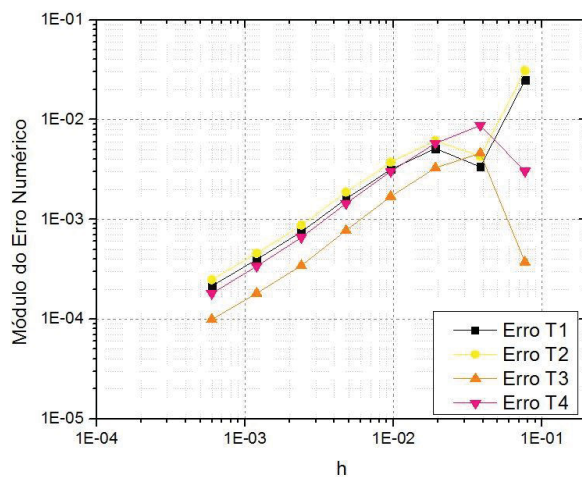


FIGURA 103 - ORDEM APARENTE PARA VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

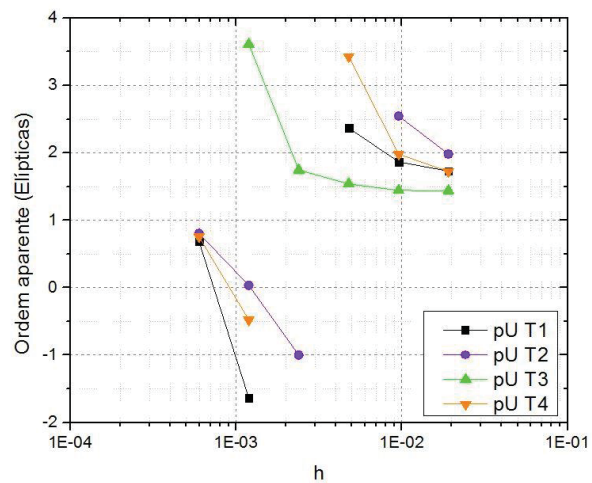


FIGURA 104 - ORDEM EFETIVA PARA VOLUMES INTERNOS CENTRAIS.

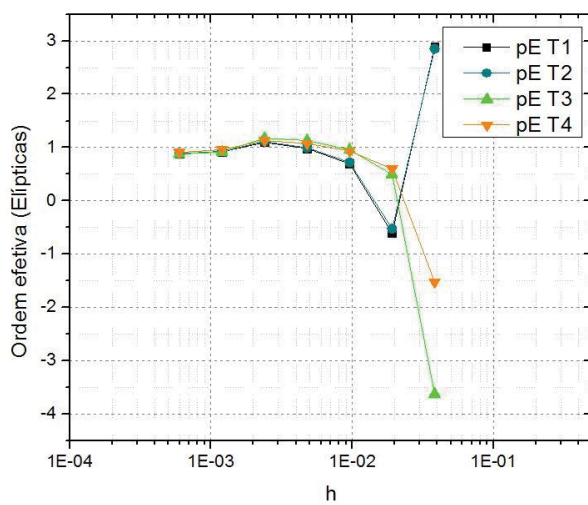


FIGURA 105 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NO CONTORNO LESTE.

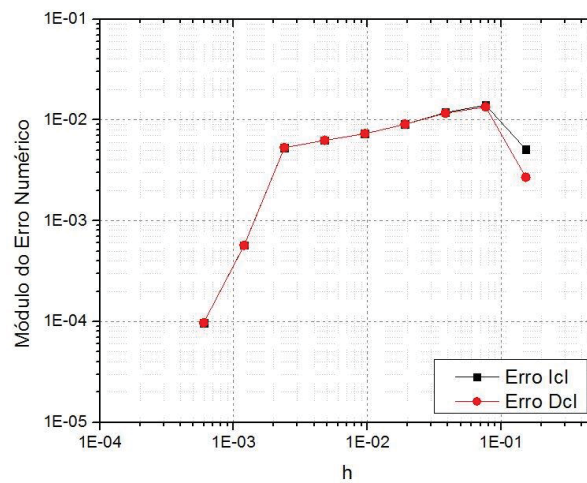


FIGURA 106 - ORDENS APARENTE E EFETIVA PARA A TEMPERATURA MÉDIA E FLUXO NO CONTORNO LESTE.

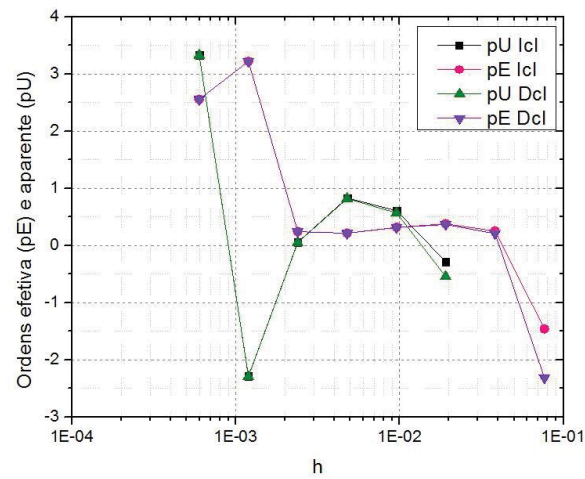
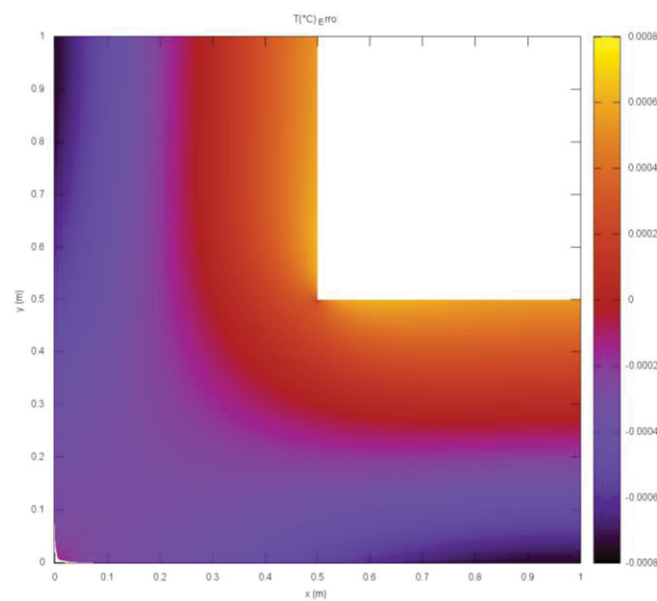


FIGURA 107 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA ELÍPTICAS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN PARA VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.



#### 4.4 COMPARAÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O L

Nesta seção é apresentada o resumo dos valores das ordens efetiva (pE) e aparente (pU) obtidas para cada uma das técnicas. também é apresentado a comparação em relação ao módulo do erro numérico obtido para cada caso.

##### *Dirichlet*

Inicialmente, na Tabela 3 é apresenta a comparação entre o módulo do erro numérico para as três técnicas de aplicação de condição de contorno com a condição de contorno de Dirichlet. As técnicas estão ordenadas do menor erro numérico obtido para o maior erro numérico.

Já em relação às ordens efetiva (pE) e aparente (pU), observa-se que há uma degeneração no valor das ordens esperado a partir do cálculo *a priori* para algumas variáveis. Ou seja, *a priori*, espera-se ordens tendendo a 2 para as variáveis estudadas. A Tabela 4 apresenta o resumo dos valores para as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) mais próximos do esperado *a posteriori* obtidos para cada variável, e que nos casos possíveis, não apresente um comportamento não monotônico.

##### *Neumann*

Próxima análise envolve a comparação e resumo para a condição de contorno de Neumann aplicada com as três técnicas estudadas no presente trabalho. Na Tabela 5 consta uma comparação entre o módulo do erro numérico para as três técnicas de aplicação de condição de contorno com a condição de contorno de Neumann. As técnicas estão ordenadas na tabela do menor erro numérico obtido para o maior erro numérico.

TABELA 3 - COMPARAÇÃO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO ENTRE AS TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA DIRICHLET.

<b>Variável de interesse</b>	<b>Menor erro numérico - Lagrange</b>	<b>Menor erro numérico - Elípticas</b>
<b>Erro de <math>T_m</math></b>	Balanço de Volumes Volumes fictícios Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>T_{interno}</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>Icl</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>Dcl</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero

Em seguida, como visto anteriormente, a Tabela 6 apresenta um resumo dos valores para as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) mais próximos do esperado *a posteriori* obtidos para cada variável, e que nos casos possíveis, não apresente um comportamento não monotônico em algum momento. Analogamente ao que ocorre com a condição de contorno de Dirichlet, observa-se que há uma degeneração no valor das ordens esperado a partir do cálculo *a priori*, onde obteve-se o valor 2.

TABELA 4 - RESUMO DAS ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ESTUDADAS.

Variável de interesse	Ordens <i>a posteriori</i> - Lagrange	Ordens <i>a posteriori</i> - Elípticas
$T_m$	$p_U = 1 \quad p_E = 1$ Balanço de Volume	$p_U = 1,9 - NM^* \quad p_E = 1,9 - NM^*$ Balanço de Volume
$T_1, T_2, T_3, T_4$	$p_U = 1 \quad p_E = 1$ Volumes de espessura zero	$p_U = NM \quad p_E = 1$ Volumes de espessura zero
$Icl$	$p_U = 2 \quad p_E = 2$ Balanço de volume e volumes fictícios	$p_U = 2 - NM \quad p_E = 2 - NM$ Balanço de volume e volumes fictícios
$Dcl$	$p_U = 2 \quad p_E = 2$ Balanço de volume e volumes fictícios	$p_U = 2 - NM \quad p_E = 2 - NM$ Balanço de volume e volumes fictícios

\* NM = Não monotônico

TABELA 5 - COMPARAÇÃO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO ENTRE AS TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA NEUMANN.

Variável de interesse	Menor erro numérico - Lagrange	Menor erro numérico - Elípticas
<b>Erro de <math>T_m</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>T_{interno}</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>Icl</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>Dcl</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero

TABELA 6 - RESUMO DAS ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ESTUDADAS.

<b>Variável de interesse</b>	<b>Ordens <i>a posteriori</i> – Lagrange</b>	<b>Ordens <i>a posteriori</i> - Elípticas</b>
$T_m$	$p_U = 1,2$ $p_E = 1,2$ Balanço de Volume	$p_U = 1,2$ $p_E = 1,2$ Balanço de Volume
$T_1, T_2, T_3, T_4$	$p_U = 1$ $p_E = 1,5$ Volumes fictícios	$p_U = 1 - NM$ * $p_E = 1,2$ Balanço de volumes
$Icl$	$p_U = 1$ $p_E = 1$ Balanço de volume e volumes de espessura zero	$p_U = 1$ $p_E = 1$ Balanço de volume
$Dcl$	$p_U = 1$ $p_E = 1$ Balanço de volume e volumes de espessura zero	$p_U = 1$ $p_E = 1$ Balanço de volume

\* NM = Não monotônico

## 5 RESULTADOS A RESPEITO DO TRAPÉZIO

Este capítulo mostra os resultados obtidos para as variáveis de interesse para a geometria do trapézio. Aplicou-se a cada uma das três técnicas para aplicação de condição de contorno: volumes fictícios, balanço de volumes e volumes de espessura, as condições de contorno de Dirichlet e Neuman.

Independente da técnica de aplicação das condições de contorno, os campos e curvas de temperaturas esperados são os mesmos. Desta forma, nas Figs. 108 e 109 são representados os campos de temperaturas analíticas e numéricas, respectivamente. Bem como, as isotermas na Fig. 110.

FIGURA 108 - CAMPO DE TEMPERATURAS ANALÍTICAS PARA O TRAPÉZIO.

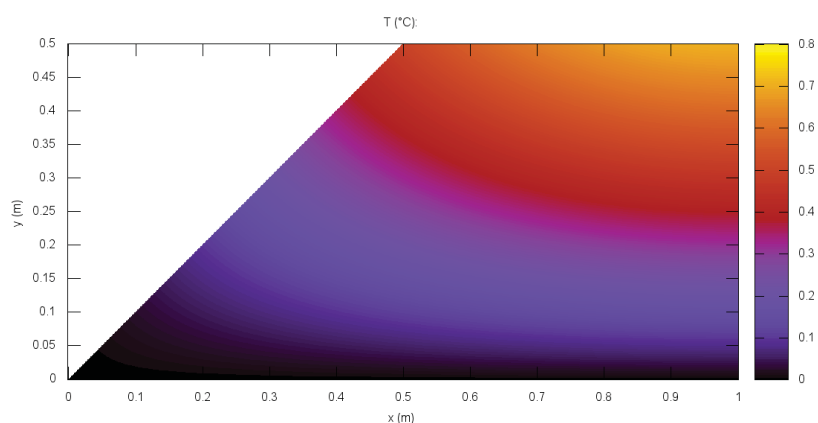


FIGURA 109 - CAMPO DE TEMPERATURAS NUMÉRICAS PARA O TRAPÉZIO.

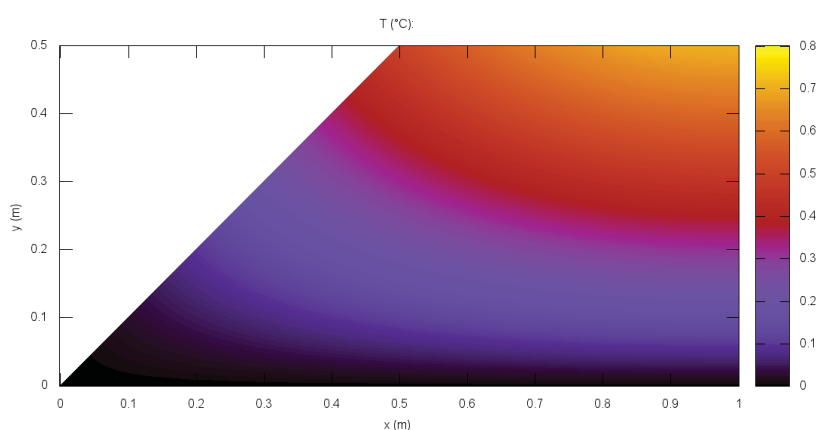
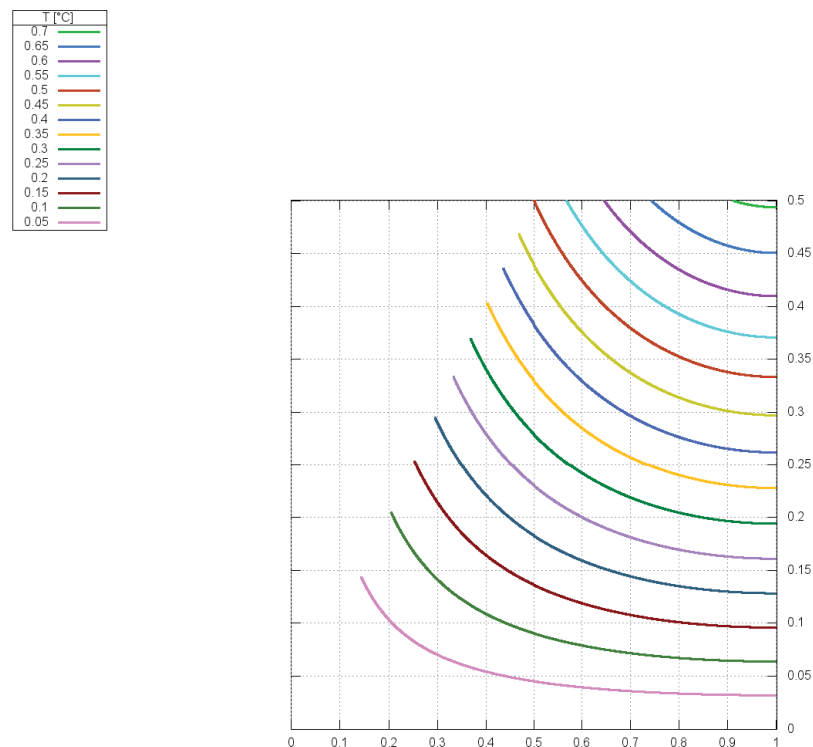




FIGURA 110 - ISOTERMAS PARA O TRAPÉZIO.



## 5.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM VOLUMES FICTÍCIOS

Os primeiros resultados obtidos são à respeito da técnica de volumes fictícios, onde foram aplicadas condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Os coeficientes obtidos para o contorno leste são dados a seguir como exemplos (ver Apêndice B), e os cálculos para os demais contornos são realizados de maneira análoga.

### 5.1.1 Condição de contorno de Dirichlet

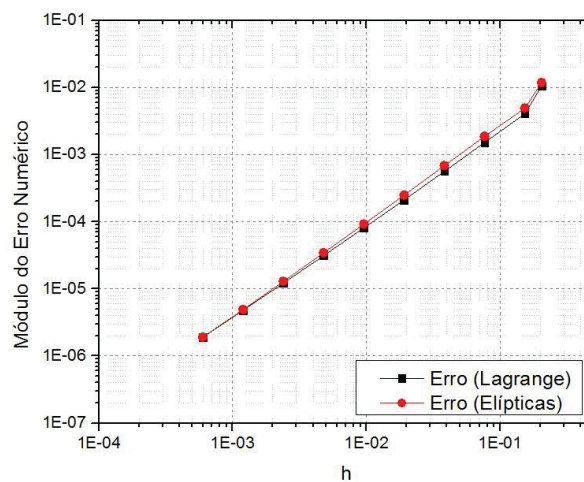
Para a condição de contorno de Dirichlet, tem-se como coeficientes para o contorno leste, por exemplo,

$$a_p = 1; a_w = -1; b_p = 2 T_w \quad (5.1)$$

onde  $T_w$  é a temperatura prescrita no contorno e é calculada através da solução analítica. As soluções são obtidas com a norma baseada no resíduo até o erro de máquina.

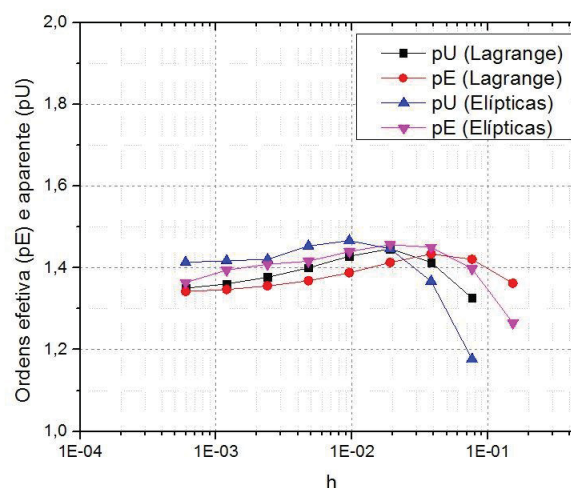
Assim, a primeira análise é feita para a temperatura média no domínio. O gráfico do módulo do erro numérico é dado pela Fig. 111, em que se observa que para a malha mais fina (1024x1024 volumes) obtém-se um erro praticamente igual quando comparando as duas malhas, ou seja, malhas elípticas e interpolação de Lagrange.

FIGURA 111 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA.



A seguir, o estudo realizado foi para as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) para a variável de interesse sendo a temperatura média do domínio. Através da Fig. 112, é possível observar que as ordens (pU) e (pE) tendem a valores entre 1,3 e 1,4.

FIGURA 112 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA A TEMPERATURA MÉDIA.



## Lagrange

Os próximos resultados apresentados para o trapézio com a técnica dos volumes fictícios com condição de contorno de Dirichlet são para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange.

A primeira análise apresentada inclui o módulo do erro numérico para os quatro volumes internos e centrais do domínio (FIGURA 113), sendo eles: T1, T2, T3 e T4. E em seguida, as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para os mesmos volumes. Nota-se que para a ordem efetiva (pE) (FIGURA 114) o valor no qual a ordem tende conforme a malha é refinada é de 1,7. Enquanto para a ordem aparente (pU) (FIGURA 115), o seu valor é de 1,0.

Em seguida, são mostrados os valores para as variáveis da média da temperatura no contorno leste (Icl), e também, a média do fluxo da temperatura no contorno leste (Dcl). A Fig. 116 ilustra o módulo do erro numérico para as duas variáveis apresentadas.

Já na Fig. 117, são apresentadas as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para ambas as variáveis (Icl, Dcl). Observa-se que para a média da temperatura no contorno leste (Icl) ambas as ordens tendem ao valor 2,0. Enquanto que para a média do fluxo no contorno leste (Dcl) há um comportamento não monotônico para ambas as ordens estudadas.

FIGURA 113 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

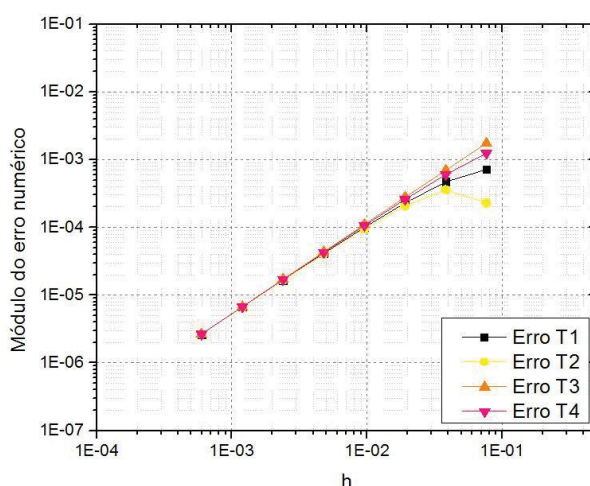


FIGURA 114 - ORDEM EFETIVA (PE) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

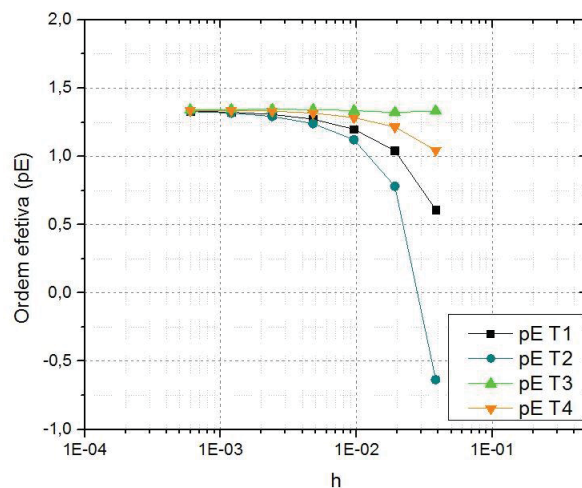


FIGURA 115 - ORDEM APARENTE (pU) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

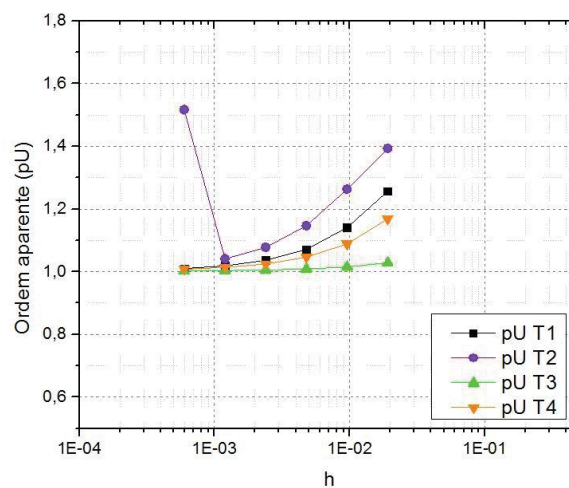


FIGURA 116 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA O FLUXO E A MÉDIA NO CONTO RNO LESTE.

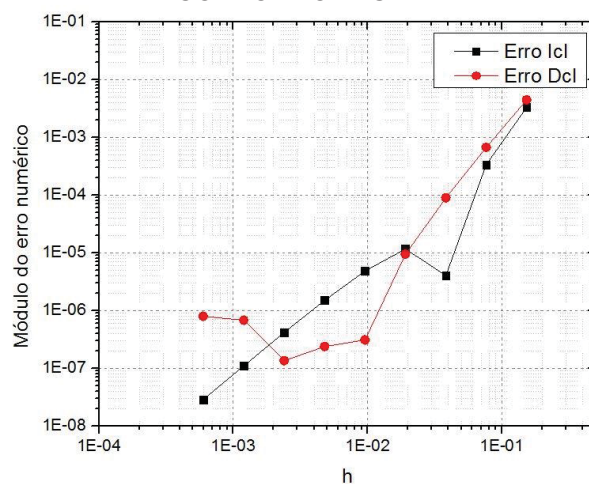
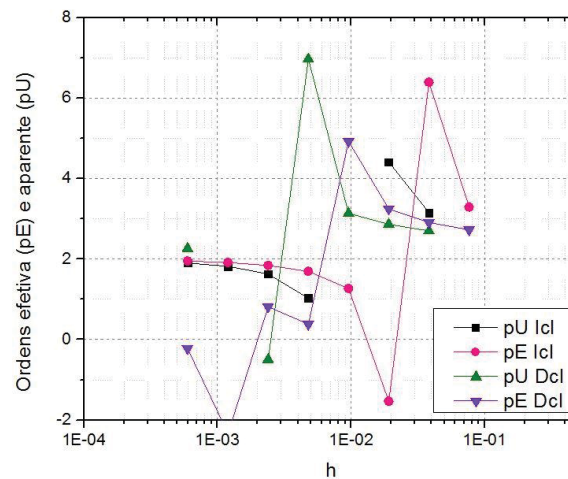
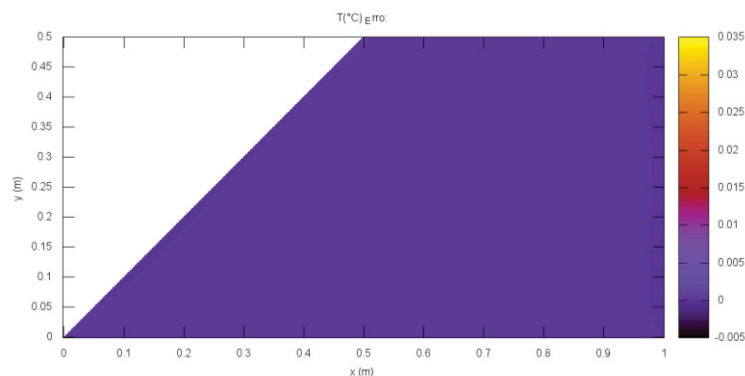


FIGURA 117 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NA MÉDIA DA TEMPERATURA E O FLUXO NO CONTORNO LESTE.



Por fim, o campo do erro numérico na Fig, 118, onde observa-se que não há concentração do erro em parte específica do domínio.

FIGURA 118 - CAMPO DO ERRO NUMÉRICO PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM VOLUMES FICTÍCIOS.



### Elípticas

Os próximos resultados dizem respeito à técnica dos volumes fictícios para a geometria do trapézio com as malhas geradas através de equações elípticas. Dado isso, a Fig. 119 ilustra o módulo do erro numérico considerando os volumes internos e centrais do domínio.

E depois, a Fig. 120 representa a ordem efetiva (pE) para os mesmos volumes, a qual tende ao valor 1.3. Depois, tem-se a ordem aparente (pU) (FIGURA 121) baseada nos mesmos volumes em questão, ou seja, os quatro volumes internos e centrais do domínio, a qual tende ao valor 1.0, seguido de um comportamento não monotônico.

FIGURA 119 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

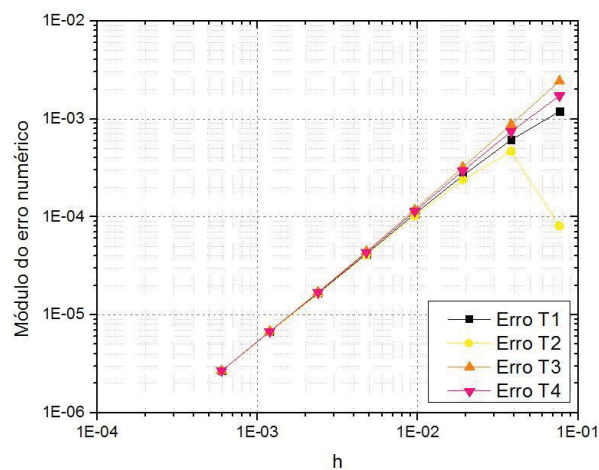


FIGURA 120 - ORDEM EFETIVA (pE) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

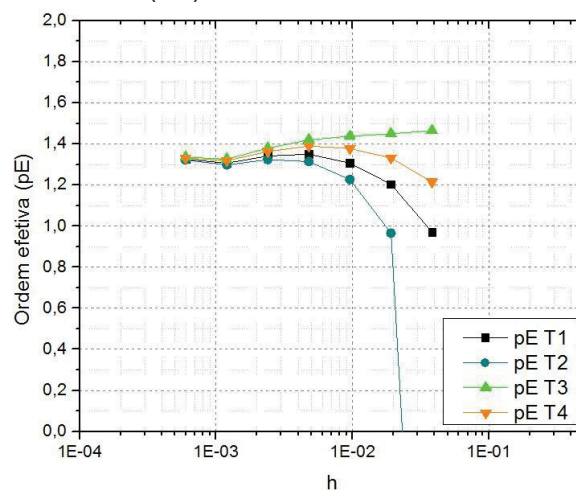
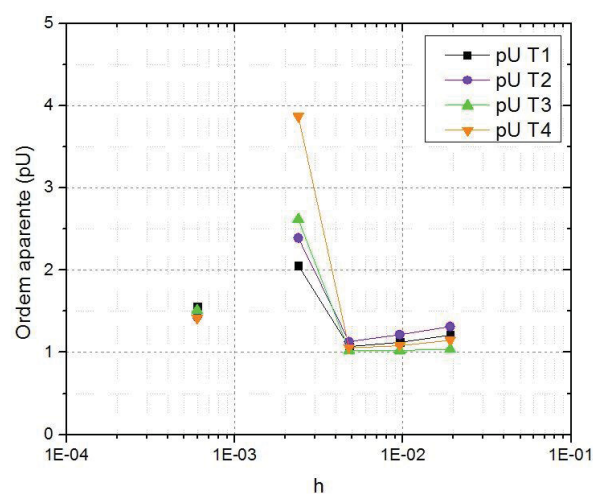


FIGURA 121 - ORDEM APARENTE (pU) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.



A última análise realizada diz respeito à média da temperatura no contorno leste (lcl), e também, a média do fluxo no contorno leste (Dcl). O módulo



do erro numérico para ambas variáveis está representado pela Fig. 122. Tem-se na Fig. 123 as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para as mesmas variáveis.

Observa-se que tanto para pE quanto para pU para as duas variáveis, ou seja, a média da temperatura no contorno (Icl) e a média do fluxo no contorno leste (Dcl) possuem valores que tendem entre 1,5 e 2,0. Por fim, é apresentado o campo do módulo do erro numérico (FIGURA 124).

FIGURA 122 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A MÉDIA E O FLUXO DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE.

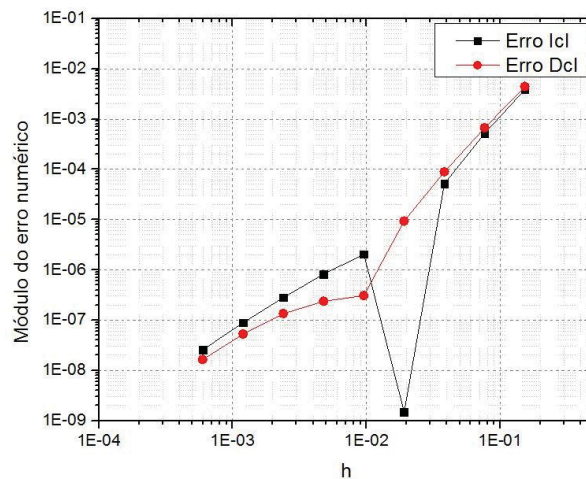


FIGURA 123 - ORDENS APARENTE (PU) E EFETIVA (PE) BASEADAS NO FLUXO E MÉDIA DE TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE.

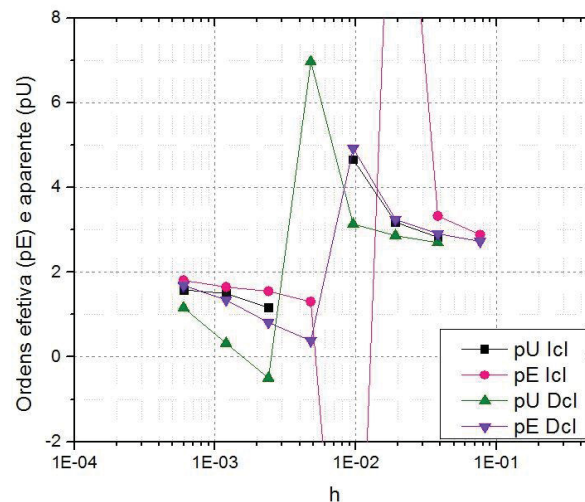
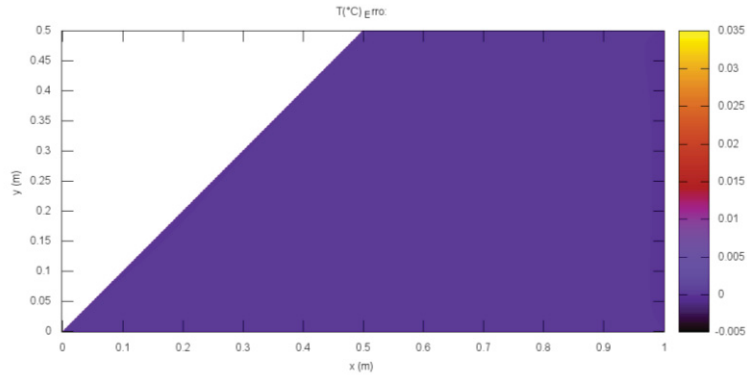


FIGURA 124 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A CONDIÇÃO DE CONTOURO DE DIRICHLET COM VOLUMES FICTÍCIOS.



### 5.1.2 Condição de contorno de Neumann

Os próximos resultados apresentados dizem respeito à condição de contorno de Neumann aplicada à geometria do trapézio com a técnica de aplicação de condições de contorno com volumes fictícios. Os coeficientes e termo fonte para o contorno leste, por exemplo, são dados por

$$a_P = 1; a_W = 1 \quad (5.2)$$

$$a_N = a_{NW} = \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \frac{\beta_w}{\alpha_w} \quad (5.3)$$

$$a_S = a_{SW} = - \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \frac{\beta_w}{\alpha_w} \quad (5.4)$$

$$b_p = \frac{q''}{\Gamma^\theta} \frac{\Delta \xi}{J_W \alpha^{1/2}} \quad (5.5)$$

onde  $J$  é o Jacobiano da transformação, e  $\frac{q''}{\Gamma^\theta}$  é o fluxo calculado através da derivada da solução analítica para o contorno. Todos os resultados são calculados até que a norma atinja o erro de máquina.

São apresentados o módulo do erro numérico (FIGURA 126) para a temperatura média no domínio para ambas as malhas. Com isso, as ordens efetiva (pE) e aparente (pU), na Fig. 127, para a mesma variável da temperatura



média para a geometria do trapézio. Observa-se que tanto para a malha gerada através de equações elípticas, como para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange, as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) tendem a 0,7.

FIGURA 125 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TEMPERATURA MÉDIA.

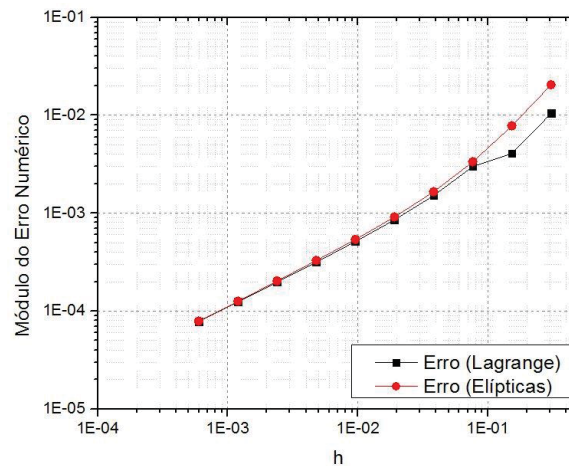
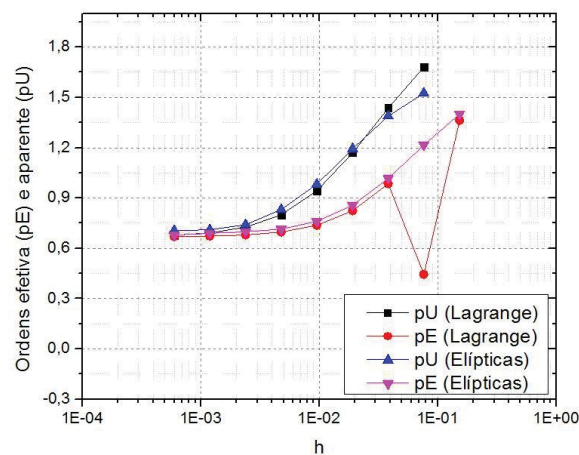


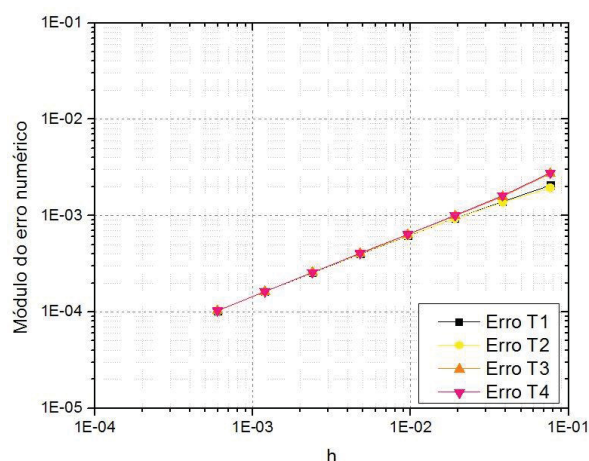
FIGURA 126 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA.



### Lagrange

Os próximos resultados consideram somente as malhas geradas através de interpolação de Lagrange para a mesma técnica com a condição de contorno de Neumann no trapézio. E assim, a Fig. 128 ilustra o módulo do erro numérico baseado nos volumes internos e centrais ao domínio estudado.

FIGURA 127 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.



Em seguida, as Figs. 129 e 130 mostram as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para os mesmos quatro volumes internos e centrais, sendo T1, T2, T3 e T4. Observa-se que a ordem efetiva (pE) tende a um valor de aproximadamente 0,7; enquanto a ordem aparente (pU) tende a 1,0.

Na Fig. 131 tem-se o módulo do erro numérico para a média da temperatura no contorno leste, além da derivada do fluxo também no contorno. Em seguida, as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para as mesmas variáveis estão ilustradas na Fig. 132. Observa-se que ambas as ordens tendem a 0,7. Por fim, na Fig. 133 está representado o campo do módulo do erro.

FIGURA 128 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

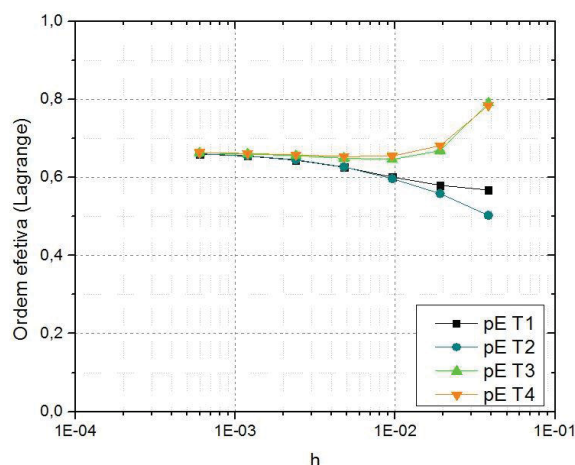


FIGURA 129 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

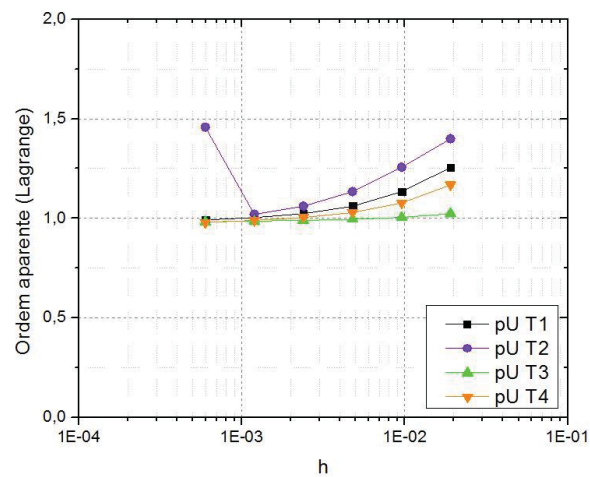


FIGURA 130 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA O FLUXO E A MÉDIA NO CONTORNO LESTE.

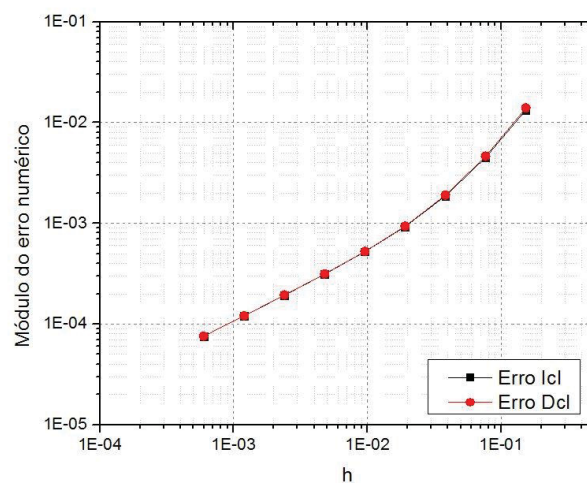


FIGURA 131 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA O FLUXO E MÉDIA DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE.

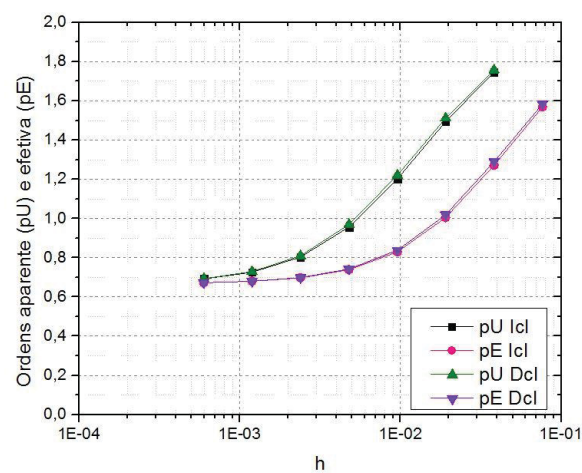
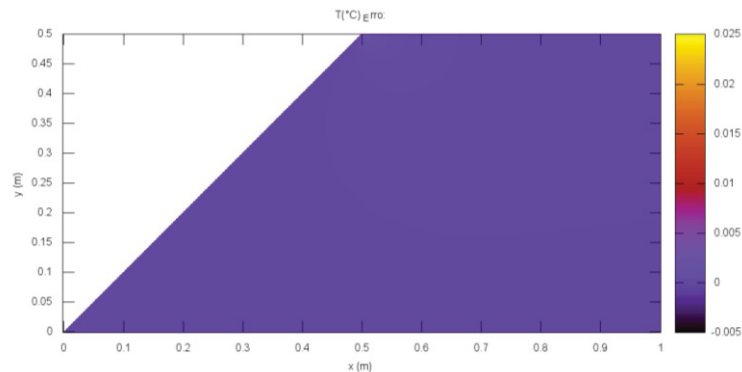


FIGURA 132 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A TÉCNICA DOS VOLUMES FICTÍCIOS COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.



### Elípticas

A última análise incluindo a técnica dos volumes fictícios, inclui a condição de contorno de Neumann para as malhas geradas através de equações elípticas. A Fig. 134 mostra o módulo do erro numérico para os quatro volumes internos e centrais do domínio.

Em seguida, na Fig. 135 tem-se a ordem efetiva (pE) para os mesmos quatro volumes estudados. Observa-se que a ordem tende, em média, ao valor 0,7. Mais ainda, na Fig. 136 tem-se a ordem aparente (pU) para os mesmos volumes, onde observa-se que a ordem tende a 1,0, seguido de um comportamento não monotônico.

FIGURA 133 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

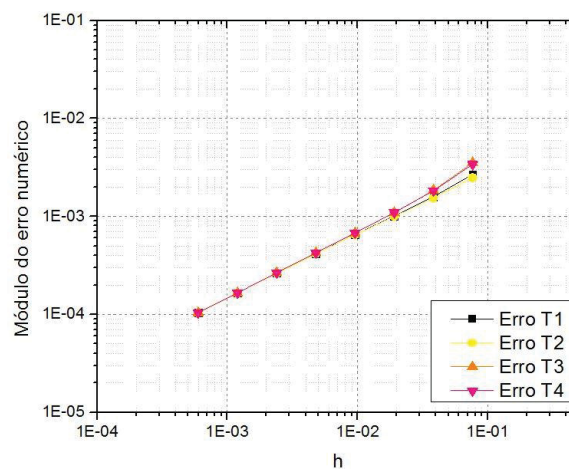


FIGURA 134 - ORDEM EFETIVA (PE) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.

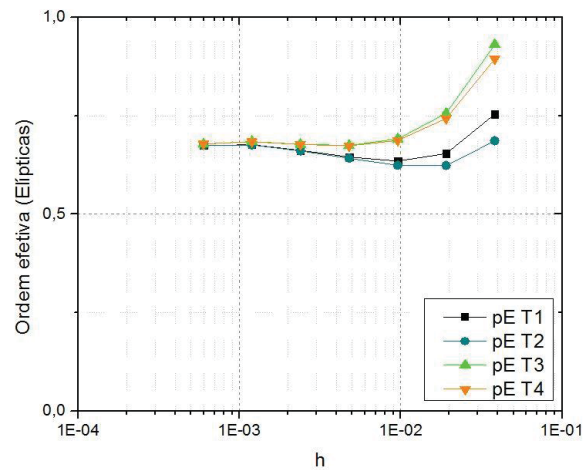
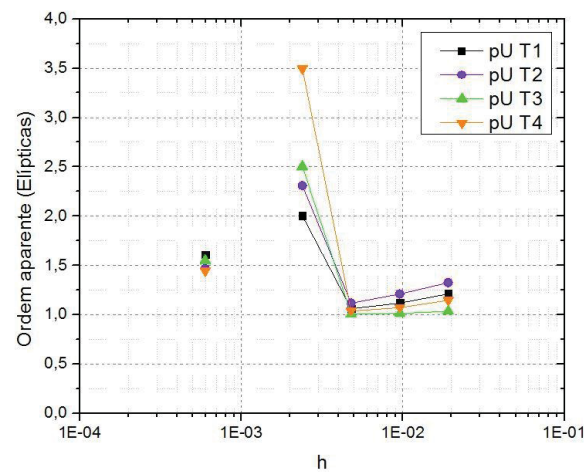


FIGURA 135 - ORDEM APARENTE (PU) BASEADA NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.



A última análise inclui o módulo do erro numérico (FIGURA 137) para as variáveis da média da temperatura no contorno leste (Icl) e a média do fluxo no contorno leste (Dcl). E as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para as mesmas variáveis, na Fig. 138. Observa-se que as ordens para ambas as variáveis tendem a 0,7. Por fim, tem-se o campo do módulo do erro numérico na Fig. 139.

FIGURA 136 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS VARIÁVEIS ICL E DCL.

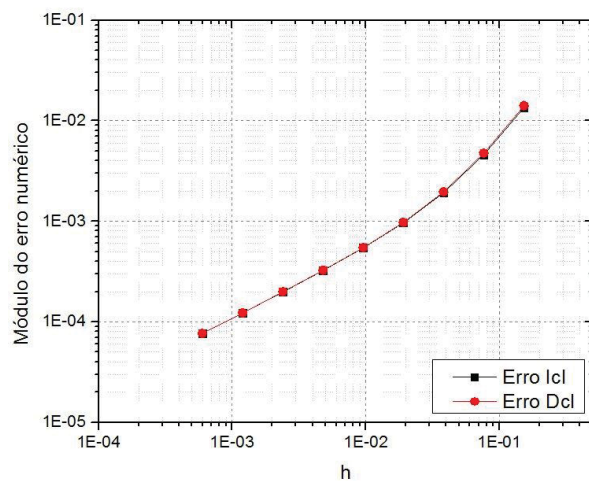


FIGURA 137 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NAS VARIÁVEIS ICL E DCL.

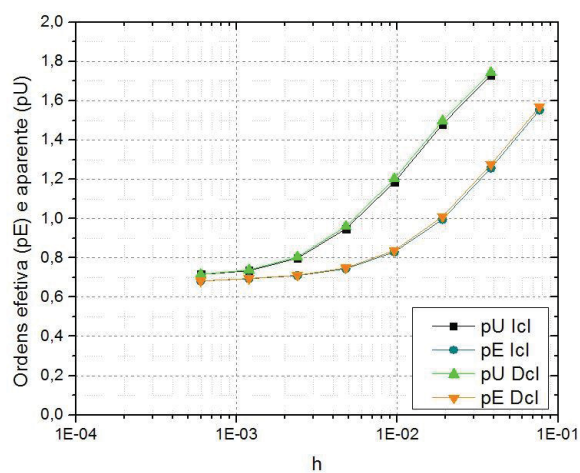
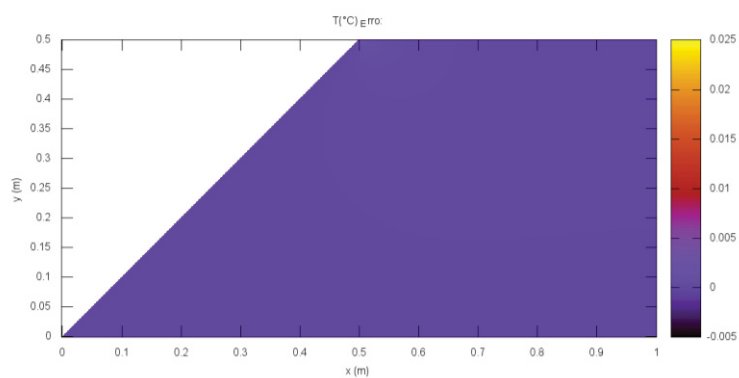


FIGURA 138 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADA COM A TÉCNICA DOS VOLUMES FICTÍCIOS COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.



## 5.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM BALANÇO DE VOLUMES

A segunda técnica estudada também no trapézio foi a de balanço de volumes na fronteira, onde faz-se a incorporação dos volumes dos contornos no domínio. Foram aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann para análises, e os resultados encontrados são apresentados a seguir.

### 4.2.1 Condição de contorno de Dirichlet

Para a primeira análise do comportamento com a técnica do balanço de volumes na fronteira, foi através da aplicação da condição de contorno de Dirichlet. Os coeficientes encontrados para um contorno leste, por exemplo, são dados por

$$a_w = \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \beta_n}{3\Delta \xi} - \frac{J_s \alpha_s}{3\Delta \xi} \quad (5.6)$$

$$a_n = \frac{J_w \beta_w}{4\Delta \eta} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} \quad (5.7)$$

$$a_{nw} = \frac{J_w \beta_w}{4\Delta \eta} + \frac{J_n \beta_n}{3\Delta \xi} \quad (5.8)$$

$$a_s = -\frac{J_w \beta_w}{4\Delta \eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} \quad (5.9)$$

$$a_{sw} = -\frac{J_w \beta_w}{4\Delta \eta} - \frac{J_s \beta_s}{3\Delta \xi} \quad (5.10)$$

$$a_p = 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} + \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} \quad (5.11)$$



$$\begin{aligned}
b_p = & -\frac{S}{J} \Delta\xi \Delta\eta - T_{ne} \left( \frac{J_e \beta_e}{2 \Delta\eta} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta\xi} \right) + T_{se} \left( \frac{J_e \beta_e}{2 \Delta\eta} + \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta\xi} \right) \\
& - T_e \left( \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta\xi} - \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta\xi} - 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta\xi} \right)
\end{aligned} \quad (5.12)$$

onde  $a_w, a_n, a_{nw}, a_s, a_{sw}$  e  $a_p$  são os coeficientes,  $b_p$  é o termo fonte,  $T_{ne}, T_{se}$  e  $T_e$  são as temperaturas dos contornos prescritas e calculadas através da solução analítica. Também para a discretização dos volumes dos cantos, os coeficientes e termo fonte são apresentados no Apêndice B. Todos os resultados foram obtidos com a norma do resíduo atingiu o erro de máquina.

Assim, os resultados apresentados são sobre a variável da temperatura média do domínio estudado. Inicialmente tem-se o módulo do erro numérico, apresentado na Fig. 141; seguido da Fig. 142 onde estão apresentadas as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para a mesma variável. Assim, através da Fig. 153 observa-se que as ordens (pE) e (pU) para ambas as malhas estudadas, quando se tratando da temperatura média, tendem a valores entre 1,0 e 1,5.

FIGURA 139 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA.

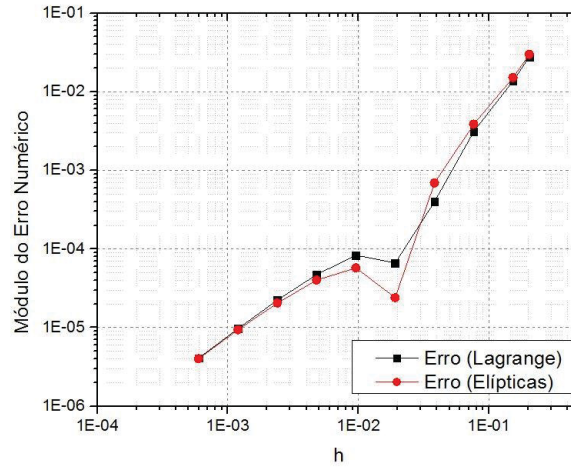
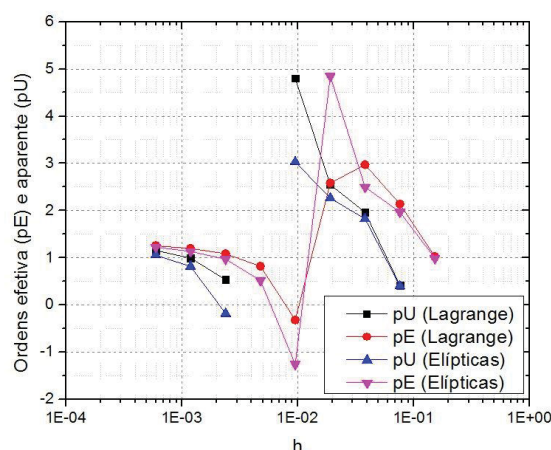




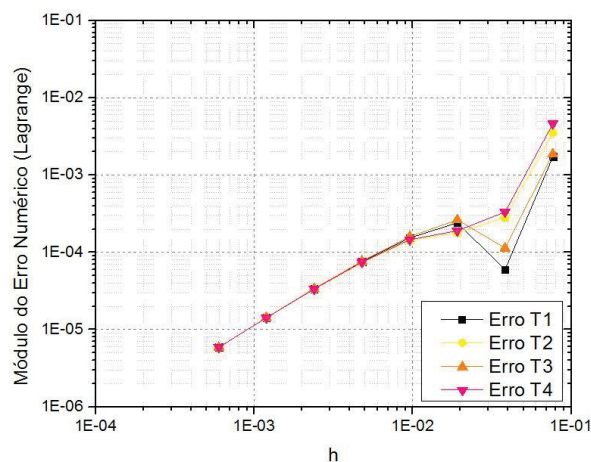
FIGURA 140 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA A TEMPERATURA MÉDIA.



### Lagrange

Em seguida, são estudadas as variáveis para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange. Os primeiros resultados apresentados são sobre os volumes internos e centrais ao domínio, ou seja, T1, T2, T3 e T4; onde o módulo do erro numérico para tais volumes está na Fig. 143.

FIGURA 141 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.



Dado isso, as próximas análises são feitas para as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para os mesmos quatro volumes internos e centrais estudados. A Fig. 144 mostra a ordem efetiva (pE), a qual tende a aproximadamente 1,5; enquanto a Fig. 145 apresenta a ordem aparente (pU) que tem como valor 1,0.

As últimas variáveis apresentadas são a média da temperatura no contorno leste (Icl) e a média do fluxo no contorno leste (Dcl). Assim, a Fig. 146

apresenta o módulo do erro numérico para essas duas variáveis; enquanto a Fig. 147 mostra as ordens efetiva (pE) e aparente (pU).

Para a variável da média da temperatura no contorno leste (Icl), observa-se através da Fig. 147 que tanto a ordem efetiva (pE) quanto para a ordem aparente (pU) tende a 2,0. Já para a média do fluxo no contorno leste (Dcl), as ordens (pE) e (pU) tendem a 1,0.

Por fim, a Fig. 148 representa o campo do módulo do erro numérico, onde observa-se que não há concentração de erro em um lugar do domínio específico.

FIGURA 142 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

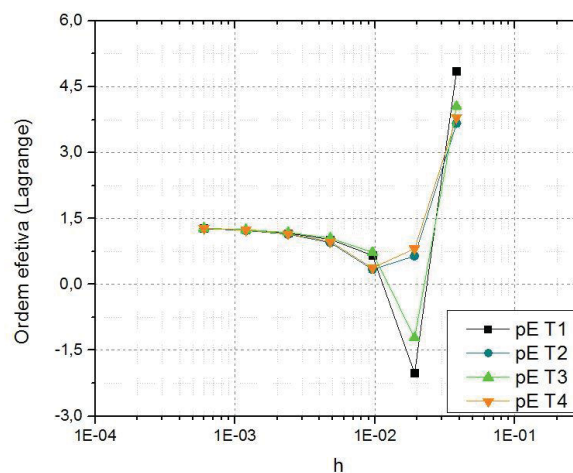


FIGURA 143 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

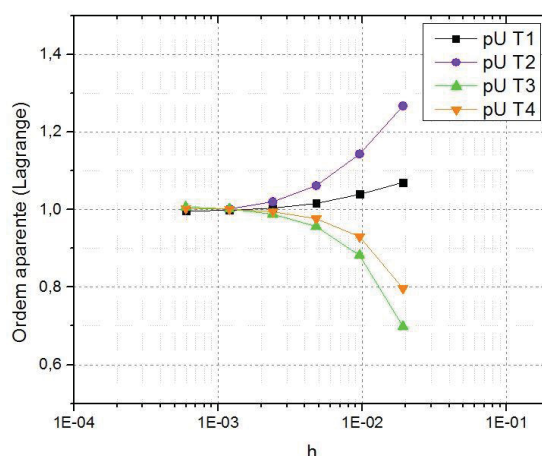


FIGURA 144 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.

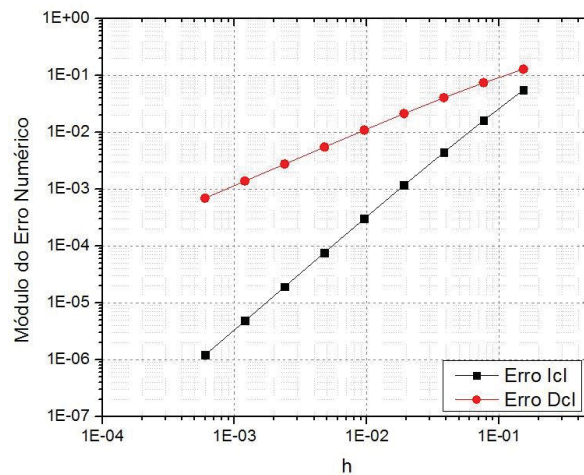


FIGURA 145 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.

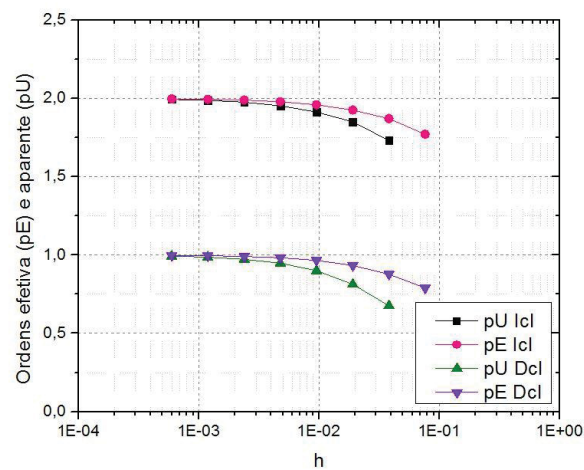
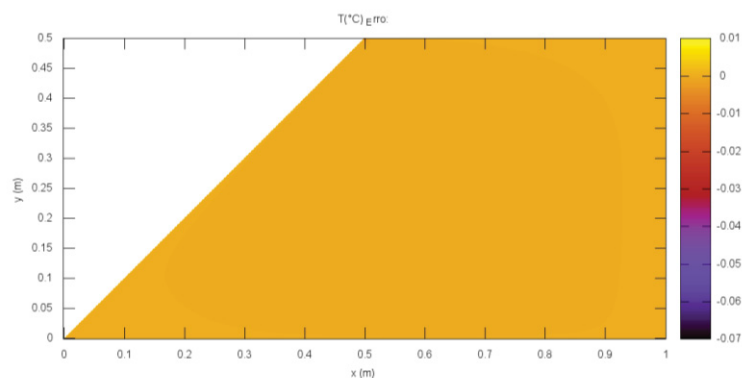


FIGURA 146 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUMES PARA DIRICHLET.



### Elípticas

A última análise e estudo feito para a condição de contorno de Dirichlet aplicada através da técnica de balanço de volumes na fronteira, são sobre as

malhas geradas através de equações elípticas. Assim, as primeiras variáveis estudadas são as temperaturas nos quatro volumes internos e centrais ao domínio do trapézio. Ou seja, T1, T2, T3 e T4.

Os módulos dos erros numéricos para cada um dos volumes estão apresentados na Fig. 149, a seguir. E adiante, estão apresentadas a ordem efetiva (pE) (FIGURA 150) e ordem aparente (pU) (FIGURA 151) para os mesmos quatro volumes.

Assim, observa-se que a para a ordem efetiva (pE) obteve-se um valor de aproximadamente 1,5; enquanto para a ordem aparente (pU) foi obtido, inicialmente, um valor de aproximadamente 1,0 seguido de um comportamento não monotônico.

FIGURA 147 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

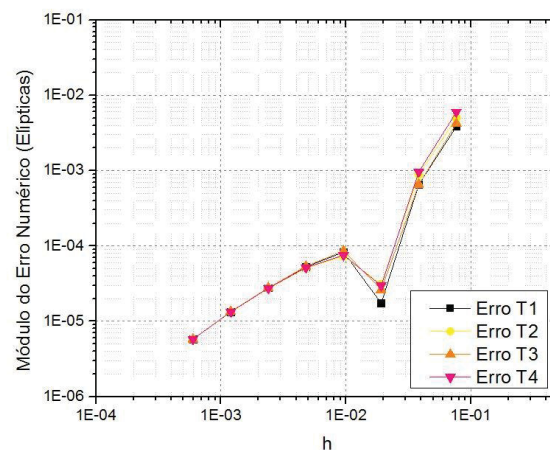


FIGURA 148 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.

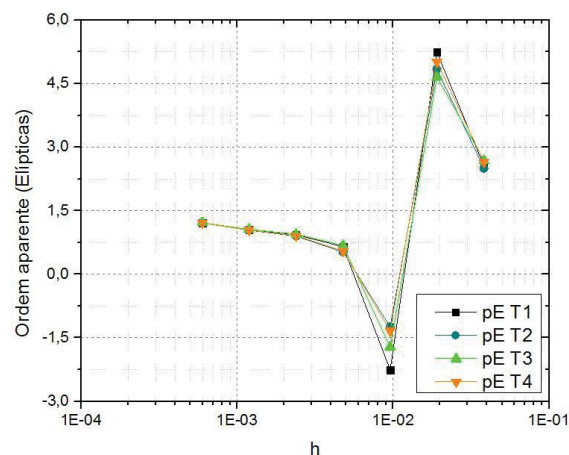
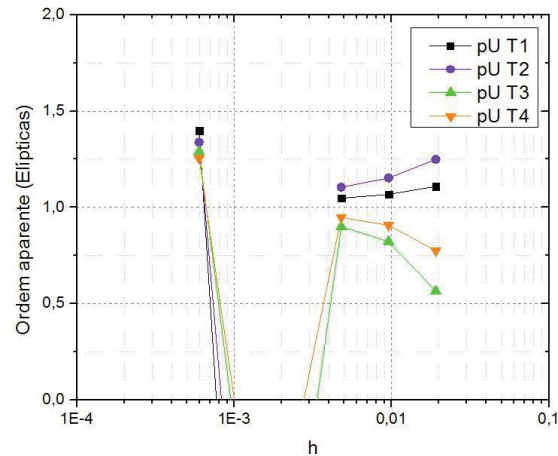


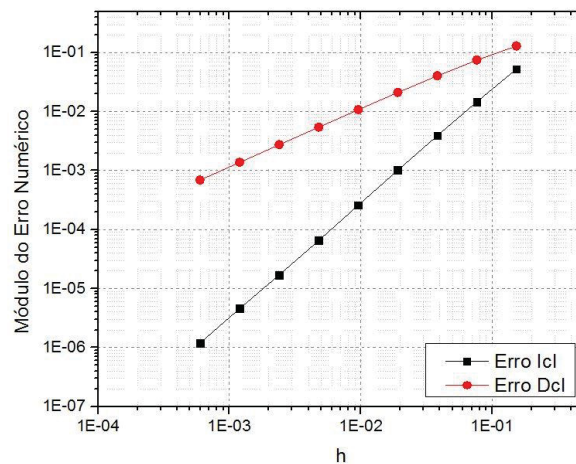
FIGURA 149 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.



As últimas variáveis estudadas são a média da temperatura no contorno (Icl) e a média do fluxo da temperatura no contorno (Dcl). O módulo do erro numérico para as duas variáveis estão apresentados na Fig. 152, e as ordens efetiva (pE) e aparente (pU), na Fig. 153.

Observa-se então, que para a variável Icl, ou seja, a média da temperatura no contorno leste, ambas as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) tendem a 2,0; já para a variável Dcl, ou seja, a média do fluxo da temperatura no contorno leste, ambas as ordens (pE) e (pU) tendem a 1,0.

FIGURA 150 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.



Por fim, o campo do módulo do erro numérico está apresentado na Fig. 154, onde assim como nas malhas geradas através de interpolação de Lagrange, não há concentração do erro em parte específica do domínio.

FIGURA 151 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.

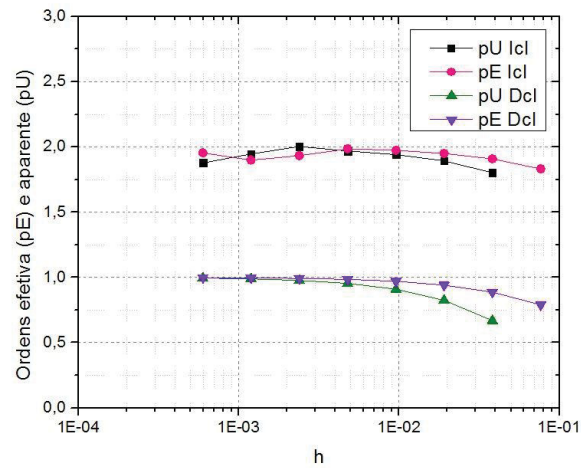
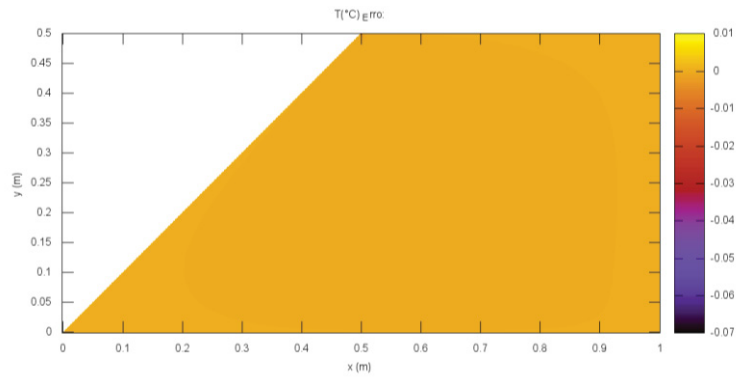


FIGURA 152 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUME COM DIRICHLET.



### 5.2.2 Condição de contorno de Neumann

O último estudo envolvendo a técnica de aplicação de condição de contorno de balanço de volumes envolve a condição de contorno de Neumann. Assim, foi aplicada a condição de contorno de Neumann no trapézio e coletados os dados para análise. Assim, os coeficientes e termo fonte utilizados, por exemplo para o contorno leste, são dados por

$$a_w = \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} - \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta \xi} \quad (5.13)$$

$$a_n = \frac{J_w \beta_w}{4 \Delta \eta} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} - \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \quad (5.14)$$

$$a_{nw} = \frac{J_w \beta_w}{4\Delta\eta} + \frac{J_n \beta_n}{3\Delta\xi} \quad (5.15)$$

$$a_s = -\frac{J_w \beta_w}{4\Delta\eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta\eta} + \frac{J_s \beta_s}{3\Delta\xi} \quad (5.16)$$

$$a_{sw} = -\frac{J_w \beta_w}{4\Delta\eta} - \frac{J_s \beta_s}{3\Delta\xi} \quad (5.17)$$

$$a_p = \frac{J_n \beta_n}{3\Delta\xi} + \frac{J_w \alpha_w}{\Delta\xi} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta\eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta\eta} - \frac{J_s \beta_s}{3\Delta\xi} \quad (5.18)$$

$$b_p = -\frac{S}{J} \Delta\xi \Delta\eta \quad (5.19)$$

onde  $a_w, a_n, a_{nw}, a_s, a_{sw}$  e  $a_p$  são os coeficientes e  $b_p$  é o termo fonte. Os cantos são discretizados separados do contorno, e seus coeficientes e termo fonte estão apresentados no Apêndice B. Como anteriormente, os resultados foram obtidos quando a norma do resíduo atingiu o erro de máquina.

Iniciando a apresentação dos resultados, tem-se a primeira variável estudada que é a temperatura média do domínio. O módulo do erro numérico esta apresentado na Fig. 156, seguido da Fig. 157 onde tem-se as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para as duas malhas. Observa-se então, que a tanto a ordem efetiva (pE) quanto a ordem aparente (pU) tendem a valores entre 0,5 e 1,0.

FIGURA 153 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA.

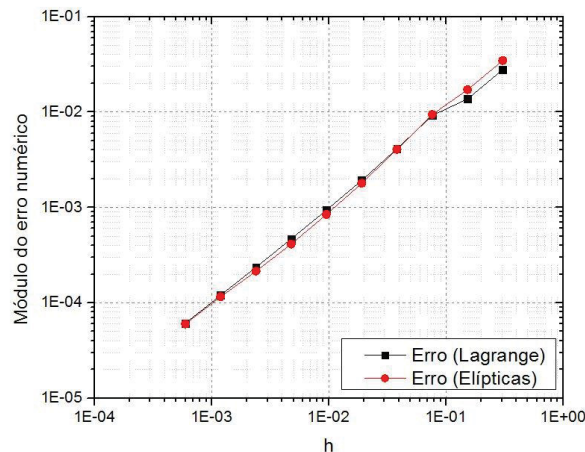
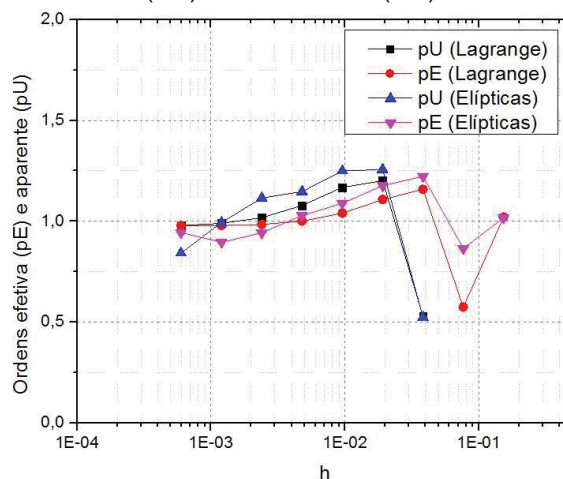




FIGURA 154 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA A TEMPERATURA MÉDIA.



### Lagrange

Os resultados para a técnica dos balanço de volumes na fronteira com a condição de contorno de Neumann utilizando somente as malhas geradas através de interpolação de Lagrange são mostrados a seguir.

As três primeiras figuras apresentadas estão relacionadas aos volumes internos e centrais do domínio do trapézio, ou seja, T1, T2, T3 e T4. Assim, o módulo do erro numérico para tais volumes é apresentado na Fig. 158.

E assim, são apresentadas as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para esses mesmos quatro volumes (T1, T2, T3 e T4), dadas a seguir pelas Figs. 159 e 160, respectivamente. Assim, analisando as Figs. 159 e 160, observa-se que tanto a ordem efetiva (pE), quanto a ordem aparente (pU) para os quatro volumes apresenta um comportamento que tende ao valor 1,0.

E em seguida, estão apresentadas as últimas variáveis estudadas para a malha de interpolação de Lagrange com a condição de contorno de Neumann, sendo elas: a média da temperatura no contorno leste (Icl) e a média do fluxo da temperatura no contorno leste (Dcl). A Fig. 161 apresenta o módulo do erro numérico para ambas as variáveis em questão, enquanto a Fig. 162 apresenta as ordens efetiva (pE) e aparente (pU). Nota-se que para as duas variáveis (Icl e Dcl), as duas ordens efetiva (pE) e aparente (pU) tendem a 1,0.

Adiante, está o campo do módulo do erro numérico na Fig. 163, onde é possível observar que embora não haja concentração do erro em parte específica do domínio, há um pequeno aumento do erro no canto noroeste do domínio.



FIGURA 155 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

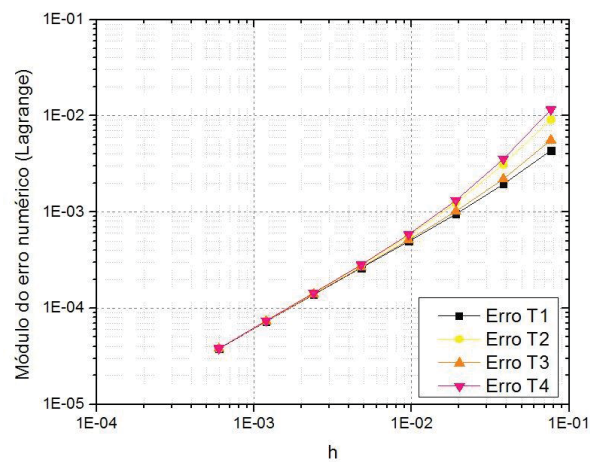


FIGURA 156 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.

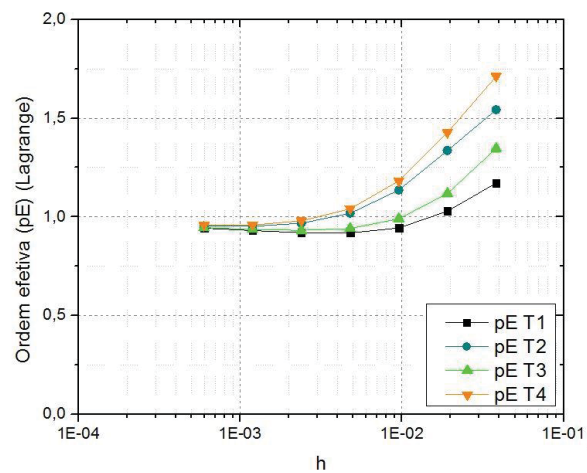


FIGURA 157 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.

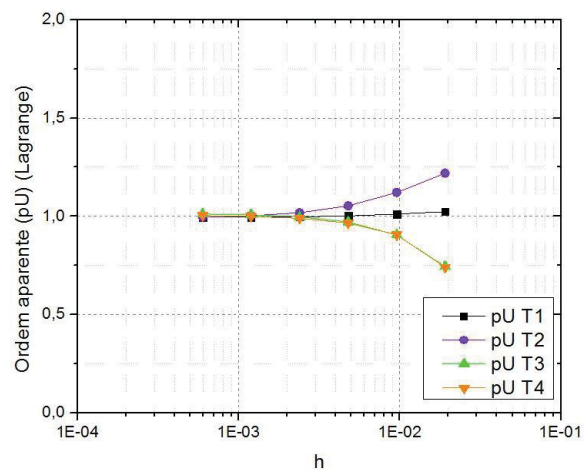


FIGURA 158 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA VARIÁVEIS ICL E DCL.

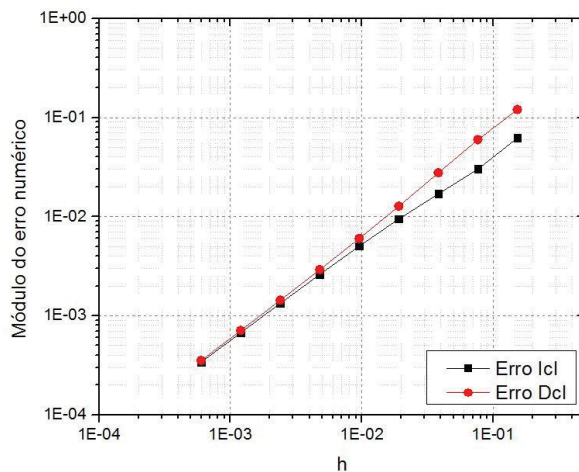


FIGURA 159 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.

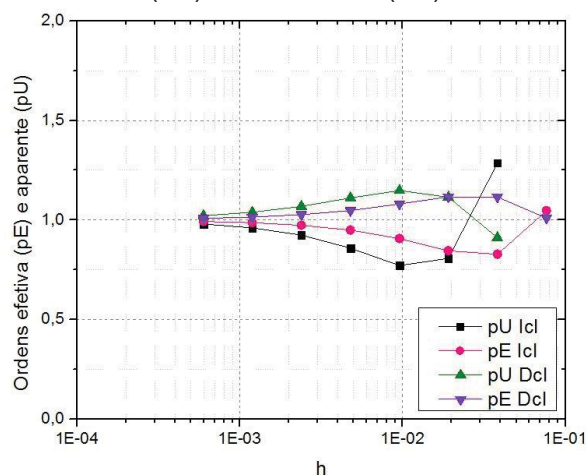
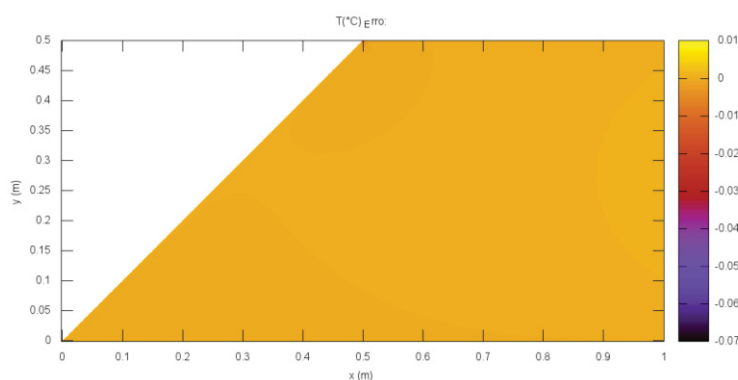


FIGURA 160 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUMES COM A CONDIÇÃO DE CONTO RNO DE NEUMANN.



### Elípticas

Por último, estão apresentados os resultados para as variáveis estudadas com a condição de contorno de Neumann para a técnica de balanço

de volumes na fronteira somente com as malhas geradas através de equações elípticas. A Fig. 164 apresenta o módulo do erro numérico para os quatro volumes internos e centrais do domínio, ou seja, T1, T2, T3 e T4.

Em seguida, as Figs. 165 e 166 apresentam as ordens efetiva (pE) e aparente (pU), respectivamente, para os mesmos quatro volumes apresentados. Assim, através da Fig. 165 observa-se que a ordem efetiva (pE) tende a 1,0 para todos os quatro volumes; enquanto através da Fig. 166 observa-se que a ordem aparente (pU) inicialmente tende também a 1,0, mas em seguida possui um comportamento não monotônico.

FIGURA 161 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

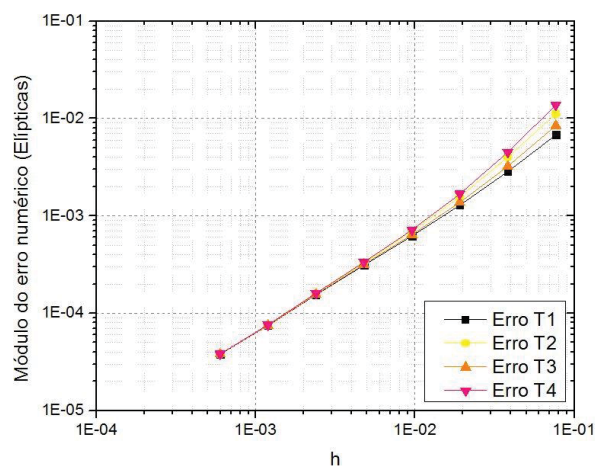


FIGURA 162 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS.

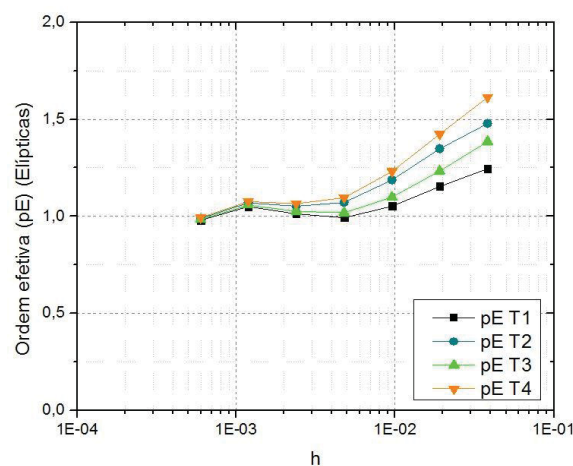
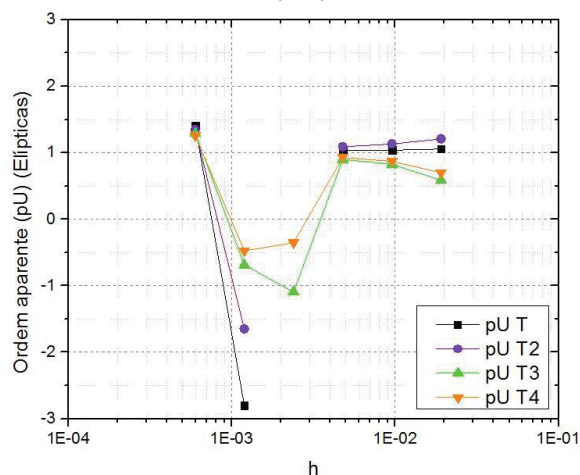


FIGURA 163 - ORDEM APARENTE (pU) PARA OS VOLUMES INTERNOS.



Mais adiante, na Fig. 167 é apresentado o módulo do erro numérico para as duas últimas variáveis estudadas: a média da temperatura no contorno leste (Icl) e a média do fluxo no contorno leste (Dcl). Já as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para as duas variáveis estão mostradas na Fig. 168. Observa-se que para as duas variáveis, Icl e Dcl, tanto a ordem efetiva (pE) quanto a ordem aparente (pU), tende a mais ou menos 1,0.

Por fim, encontra-se o campo do módulo do erro numérico na Fig. 169, onde observa-se que não há concentração do erro em lugar específico do domínio.

FIGURA 164 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NAS VARIÁVEIS ICL E DCL.

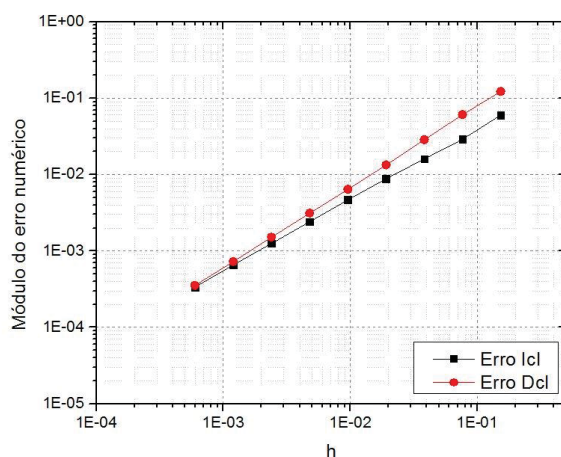


FIGURA 165 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.

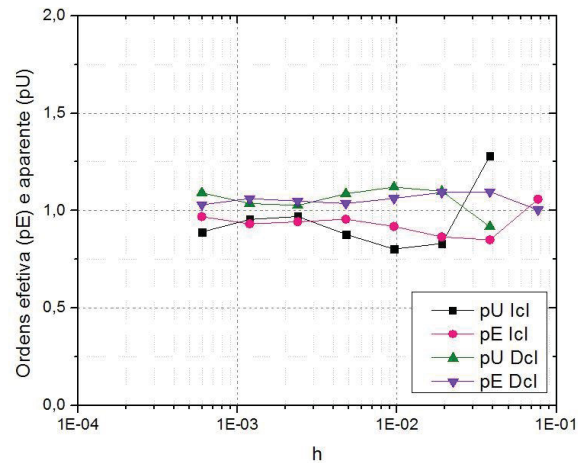
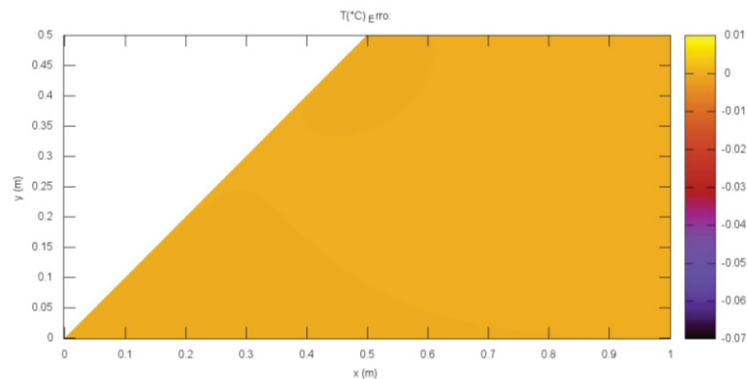


FIGURA 166 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO ANALÍTICAS APLICADAS COM A TÉCNICA DE BALANÇO DE VOLUMES COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.



### 5.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO

O último estudo feito foi sobre a técnica de aplicação de condições de contorno utilizando volumes de espessura zero. Para isso, foram aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e Neumann no trapézio com as malhas geradas através de interpolação de Lagrange e equações elípticas.

#### 5.3.1 Condição de contorno de Dirichlet

O primeiro estudo apresentado envolve a condição de contorno de Dirichlet com a técnica dos volumes de espessura zero no trapézio. Coeficientes e termo fonte utilizados, por exemplo para o contorno leste, são dados por

$$a_p = 1; b_p = T_e \quad (5.20)$$

onde  $T_e$  é a temperatura do contorno prescrita e dada através da solução analítica. Os dados foram coletados com a norma do erro baseado no resíduo já no erro de máquina foi atingido.

Em seguida, estão apresentados o módulo do erro numérico (FIGURA 171) e as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) (FIGURA 172) para a variável da temperatura média do domínio. Para as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) observa-se que tanto para as malhas geradas por equações elípticas, como para as geradas através de interpolação de Lagrange, as ordens possuem um valor 1,0.

FIGURA 167 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA TEMPERATURA MÉDIA.

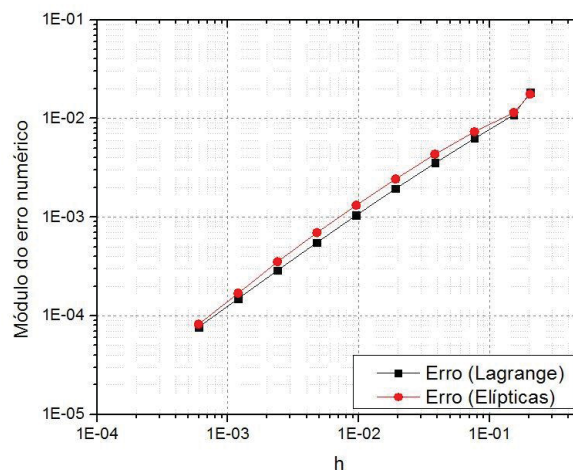
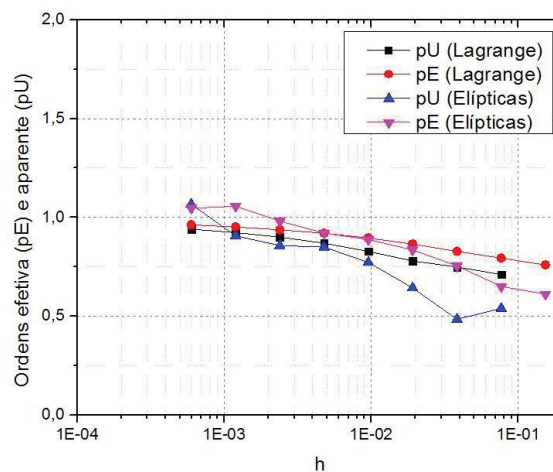


FIGURA 168 - ORDENS EFETICA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA DO DOMÍNIO.





### Lagrange

Em seguida, os resultados apresentados são sobre a mesma técnica dos volumes de espessura zero com a condição de contorno de Dirichlet para as malhas geradas através da interpolação de Lagrange. Dado isso, a primeira análise feito envolve os quatro volumes internos e centrais do domínio T1, T2, T3 e T4.

Sendo assim, o módulo do erro numérico para os mesmos quatro volumes é apresentado pela Fig. 173. E em seguida, na Fig, 174 e 175 são apresentadas as ordens aparente (pU) e efetiva (pE), respectivamente. Observa-se que para os quatro volumes em estudados, tanto a ordem aparente (pU), quanto a ordem efetiva (pE) tendem ao valor de 1,0.

FIGURA 169 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

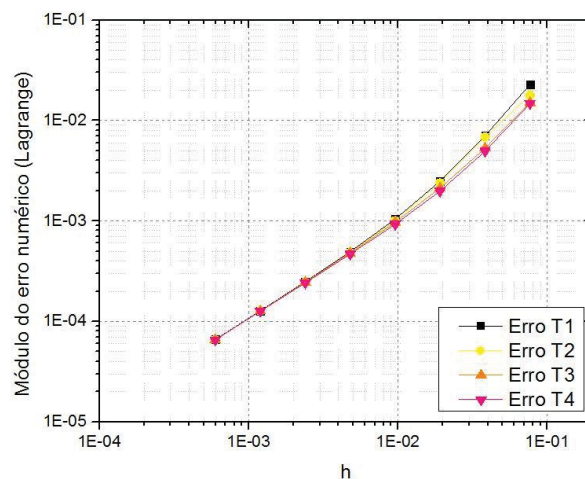


FIGURA 170 - ORDEM APARENTE (PU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

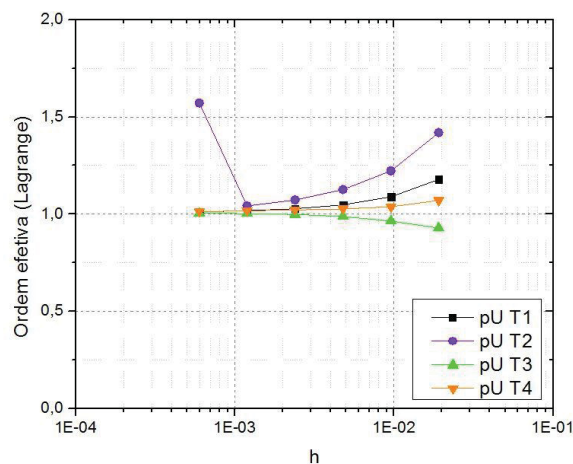
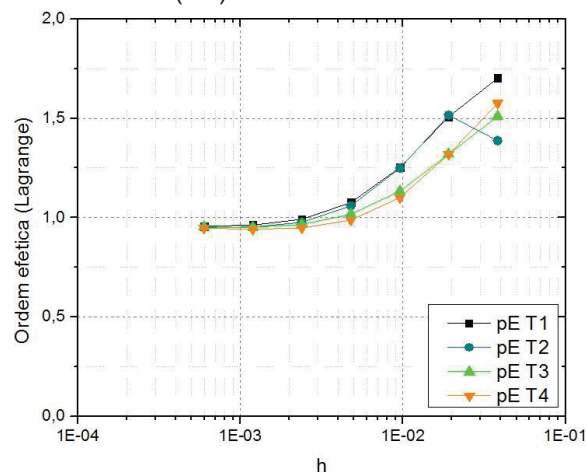


FIGURA 171 - ORDEM EFETICA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.



A seguir, estão apresentados os resultados para as últimas variáveis estudadas: a média da temperatura no contorno leste (Icl) e a média do fluxo no contorno leste (Dcl). O módulo do erro numérico para ambas variáveis é apresentado na Fig. 176, enquanto as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) são mostradas na Fig. 177 adiante. Observa-se que para as duas variáveis aqui estudadas, sendo a média da temperatura no contorno (Icl) e a média do fluxo no contorno leste (Dcl), ambas as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) tendem a aproximadamente 1,7.

Por fim, o campo do módulo do erro numérico na Fig. 178, onde não se observa uma concentração específica de erro no domínio.

FIGURA 172 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA A MÉDIA DA TEMPERATURA E FLUXO NO CONTOURO LESTE.

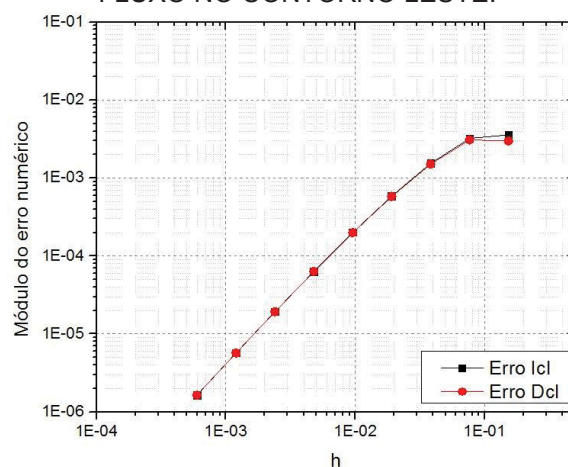




FIGURA 173 - ORDENS EFETIVA (pE) E APARENTE (pU) BASEADAS NO FLUXO E NA MÉDIA DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE.

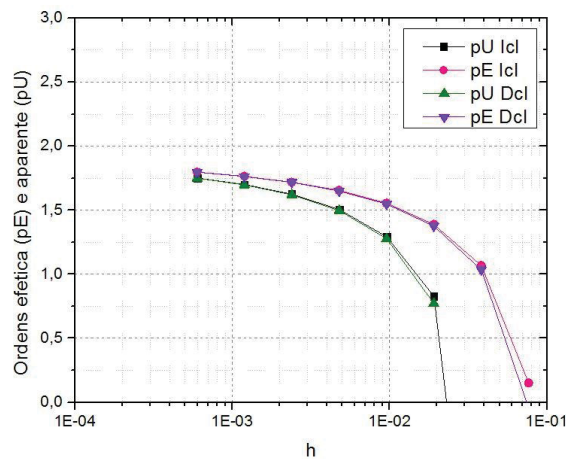
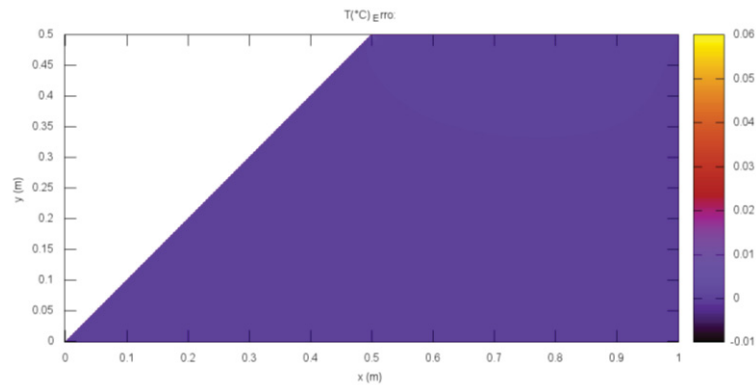


FIGURA 174 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET COM A TÉCNICA DE VOLUMES DE ESPESSURA ZERO.



### Elípticas

Os próximos resultados aqui apresentados envolvem a técnica dos volumes de espessura zero com a condição de contorno de Dirichlet, porém utilizando somente as malhas geradas através de equações elípticas. Assim como visto anteriormente, a primeira análise feita envolve os quatro volumes internos e centrais no domínio do trapézio T1, T2, T3 e T4.

A Fig. 179 apresenta o módulo do erro numérico a respeito dos quatro volumes, enquanto as Figs. 180 e 181 apresentando as ordens efetiva (pE) e aparente (pU), respectivamente. Observa-se que enquanto a ordem efetiva (pE) tendem a 1,0 para qualquer um dos quatro volumes, a ordem aparente (pU) tende inicialmente a 1,0, e em seguida apresenta um comportamento não monotônico.

FIGURA 175 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS.

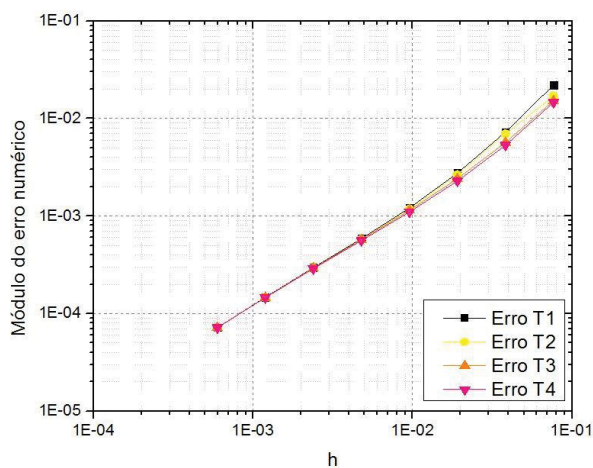


FIGURA 176 - ORDEM EFETIVA (PE) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.

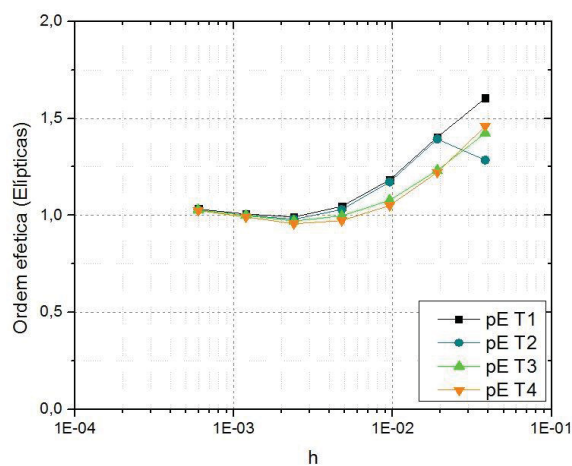
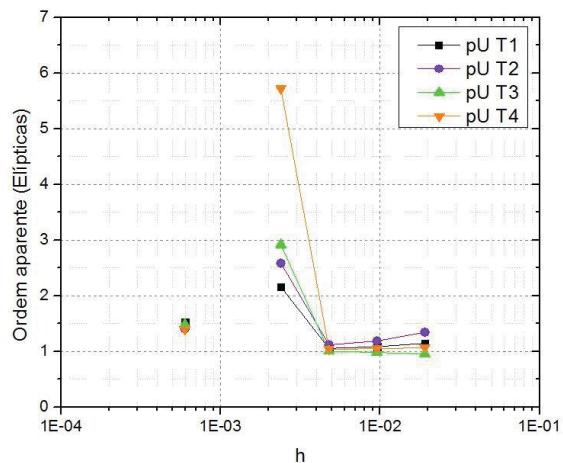


FIGURA 177 - ORDEM APARENTE (PU) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS DO DOMÍNIO.



Em seguida, estão apresentados os resultados a respeito das variáveis  $I_{cl}$  (média da temperatura no contorno leste) e  $D_{cl}$  (média do fluxo no contorno leste). O módulo do erro numérico está representado na Fig. 182, e as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) na Fig. 183. Observa-se que para ambas variáveis ( $I_{cl}$  e  $D_{cl}$ ) as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) tendem a aproximadamente 1,7. Por fim, o campo do módulo do erro numérico na Fig. 184, onde também não se observa concentração específica do erro.

FIGURA 178 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA O FLUXO E A MÉDIA DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE.

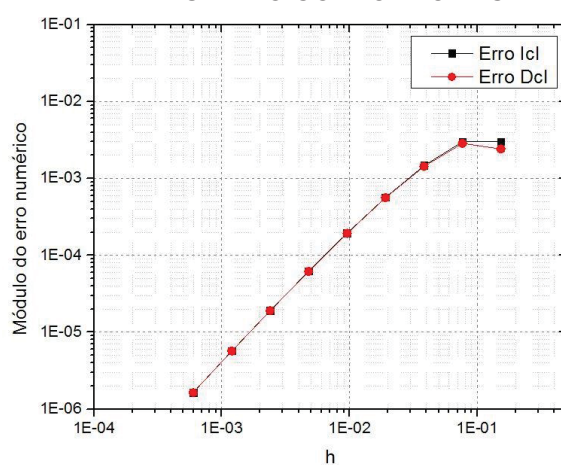


FIGURA 179 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA O FLUXO E A MÉDIA DA TEMPERATURA NO CONTORNO LESTE.

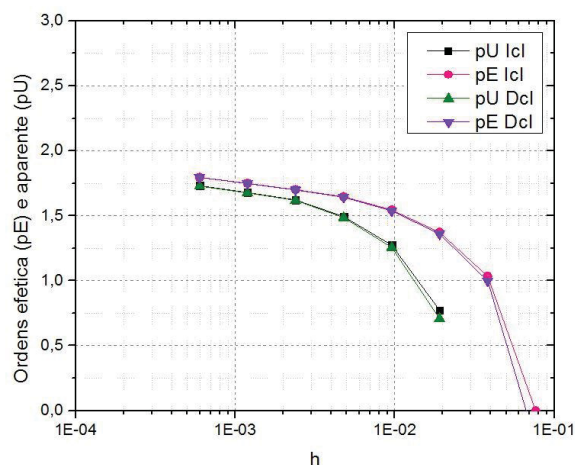
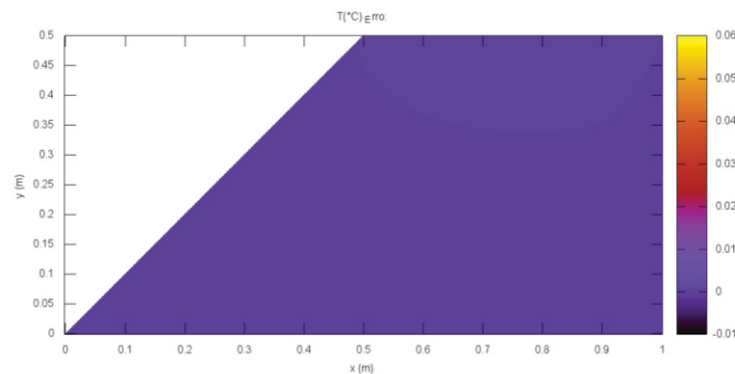


FIGURA 180 - CAMPO BASEADO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET.



### 5.3.2 Condição de contorno de Neumann

Os próximos resultados envolvem a técnica de aplicação de condição de contorno através de volumes de espessura zero com a condição de contorno de Neumann para os dois tipos de malhas geradas. Assim, os coeficientes utilizados, por exemplo para o contorno leste, são dados por

$$a_p = 1; a_w = 1; b_p = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.21)$$

onde  $\frac{\partial T}{\partial x}$  é a derivada da solução analítica no contorno onde imposto a condição de contorno de Neumann. Dado isso, os resultados foram obtidos com a norma baseada no resíduo quando o erro de máquina foi atingido para evitar erros de iteração.

Assim, a primeira análise feita envolve a variável da temperatura média do domínio. O módulo do erro numérico é dado pela Fig. 186, e as ordens aparente (pU) e efetiva (pE) pela Fig. 187. Para as malhas geradas através de equações elípticas, nota-se um comportamento não monotônico para as duas ordens estudadas; já para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange, observa-se que as duas ordens (pE e pU) tendem a 1,0.

FIGURA 181 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO BASEADO NA TEMPERATURA MÉDIA.

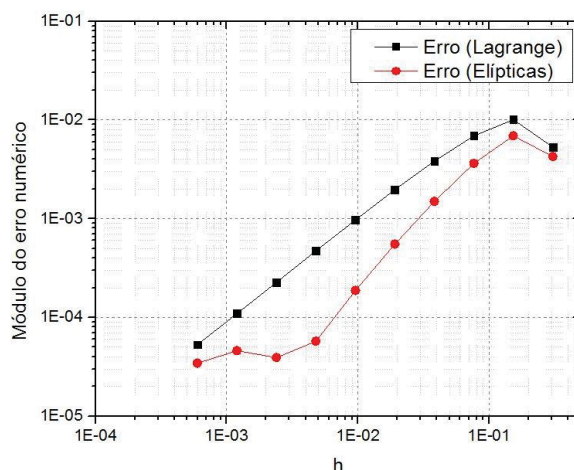
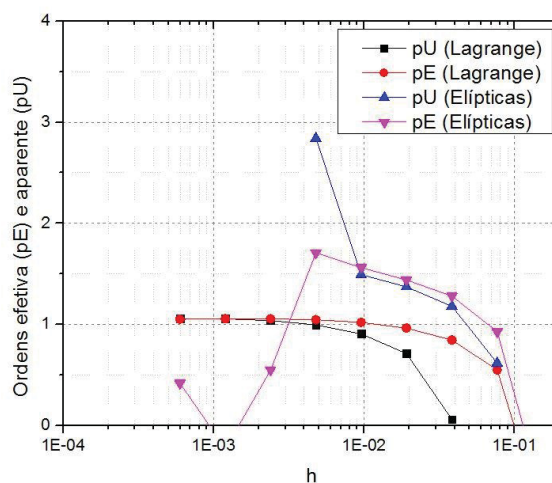


FIGURA 182 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADAS NA TEMPERATURA MÉDIA.



### Lagrange

Os próximos resultados apresentam, para a mesma técnica dos volumes de espessura zero com a condição de contorno de Neumann, as variáveis para as malhas geradas através de interpolação de Lagrange.

Na Fig. 188 tem-se o módulo do erro numérico para os quatro volumes internos e centrais do domínio estudados T1, T2, T3 e T4. Em seguida, tem-se as ordens efetiva (pE) representada na Fig. 189, e a ordem aparente (pU), representada na Fig. 190. Através das dessas duas figuras, observa-se que tanto a ordem efetiva (pE) quanto a ordem aparente (pU), para os quatro volumes estudados, tendem a 1,0.

FIGURA 183 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

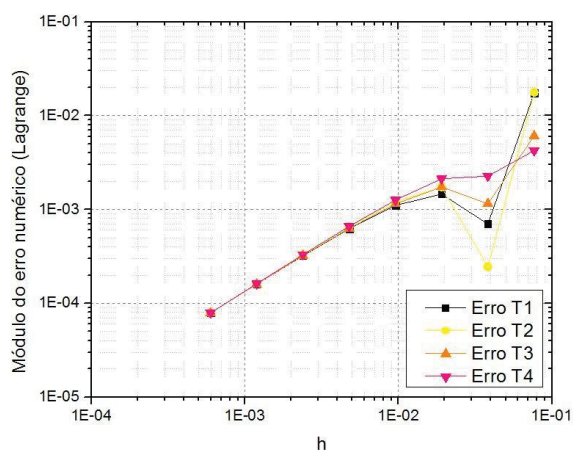


FIGURA 184 - ORDEM EFETIVA (PE) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

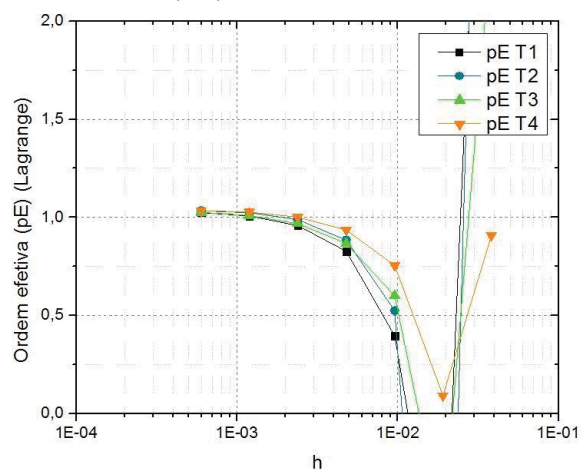
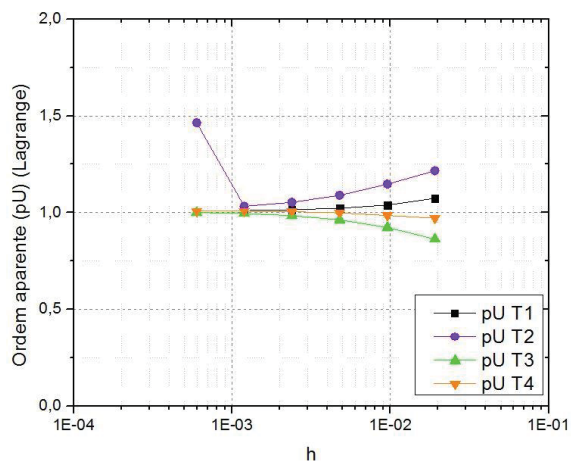


FIGURA 185 - ORDEM APARENTE (pU) PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.



As últimas variáveis estudadas são a média da temperatura no contorno leste (lcl) e a média do fluxo da temperatura no contorno leste (Dcl). O módulo do erro numérico para ambas as variáveis é apresentado na Fig. 191. A Fig. 192 apresenta as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para as duas variáveis lcl e

Dcl, onde observa-se que tanto a ordem efetiva (pE) quanto a ordem aparente (pU) para as variáveis Icl e Dcl tendem a 1,0. E por fim, o campo do módulo do erro numérico (FIGURA 193).

FIGURA 186 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.

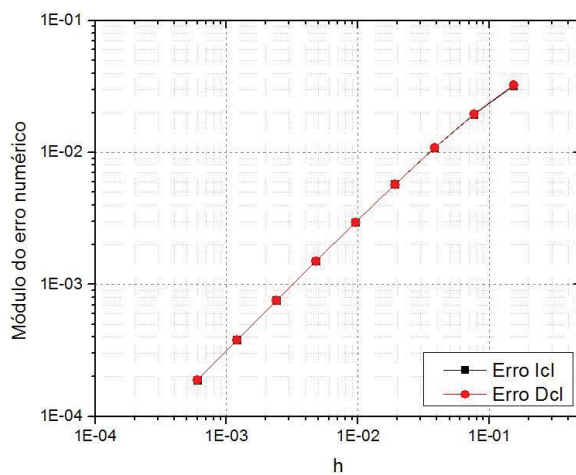


FIGURA 187 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) BASEADO NAS VARIÁVEIS ICL E DCL.

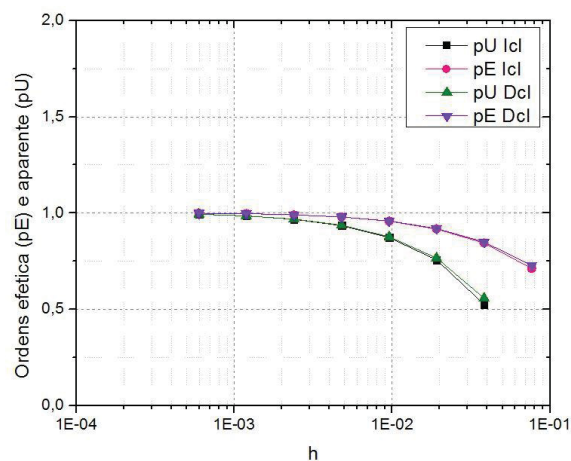
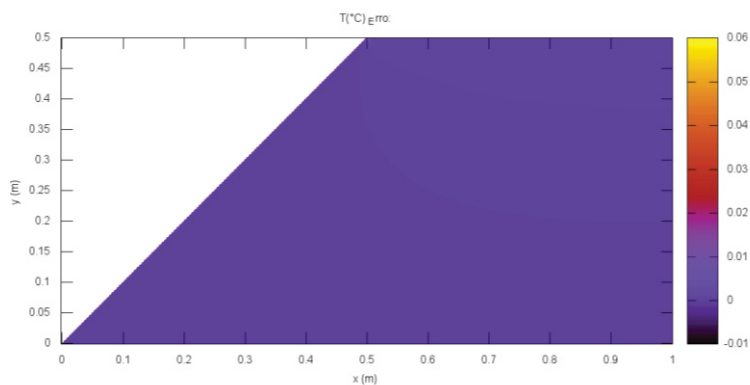


FIGURA 188 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.





## Elípticas

E por fim, tem-se os resultados para a técnica dos volumes de espessura zero com a condição de contorno de Neumann para o trapézio, utilizando somente as malhas geradas através de equações elípticas. Como feito anteriormente, o primeiro estudo envolve os quatro volumes internos e centrais do domínio, ou seja, T1, T2, T3 e T4, onde o módulo do erro numérico para esses quatro volumes está apresentado na Fig. 194. As ordens efetiva (pE) e aparente (pU) estão apresentadas nas Figs. 195 e 196, respectivamente.

Observa-se na Fig.195 que a ordem efetiva (pE) para qualquer um dos quatro volumes internos e centrais, tende a 1,0. Porém, para a ordem aparente (pU) na Fig. 196, observa-se que inicialmente, assim como pE, tende-se ao valor de 1,0, mas em seguida há um comportamento não monotônico.

FIGURA 189 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA OS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

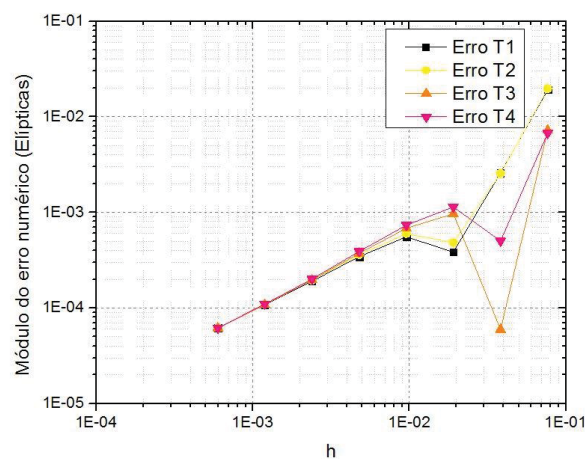


FIGURA 190 - ORDEM EFETIVA (PE) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.

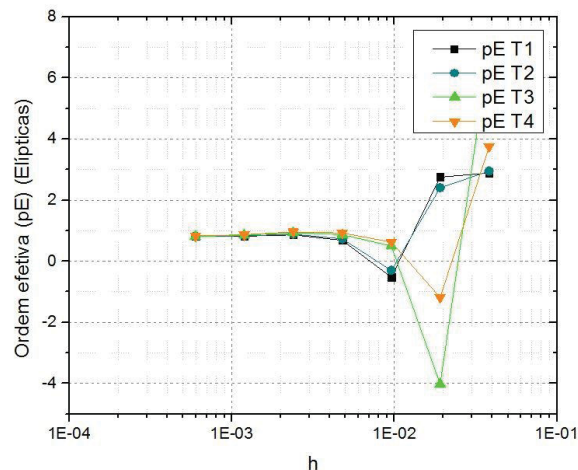
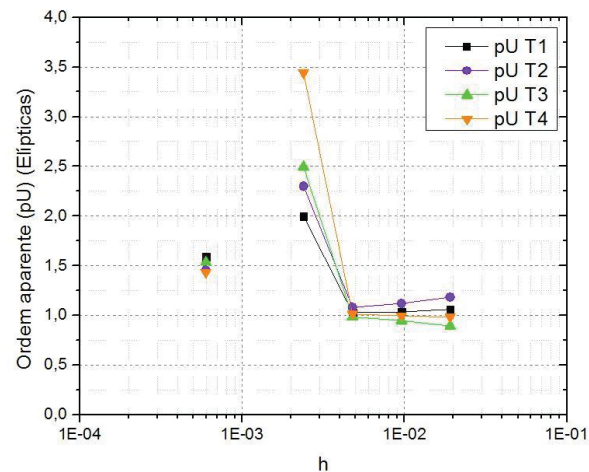




FIGURA 191 - ORDEM APARENTE (PU) BASEADO NOS VOLUMES INTERNOS E CENTRAIS.



Também como visto anteriormente, os últimos estudos realizados são para as variáveis da média da temperatura no contorno leste (Icl) e a média do fluxo da temperatura no contorno leste (Dcl). Inicia-se como o módulo do erro numérico através da Fig. 197, e adiante, tem-se na Fig. 198 as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) para as duas variáveis aqui estudadas. Deste modo, observa-se que tanto para Icl quanto para Dcl, e tanto para pE quanto pU, possuem inicialmente um comportamento monotônico tendendo a 1,0, porém em seguida observa-se um comportamento não monotônico. Por fim, o campo do módulo do erro numérico (FIGURA 199).

FIGURA 192 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.

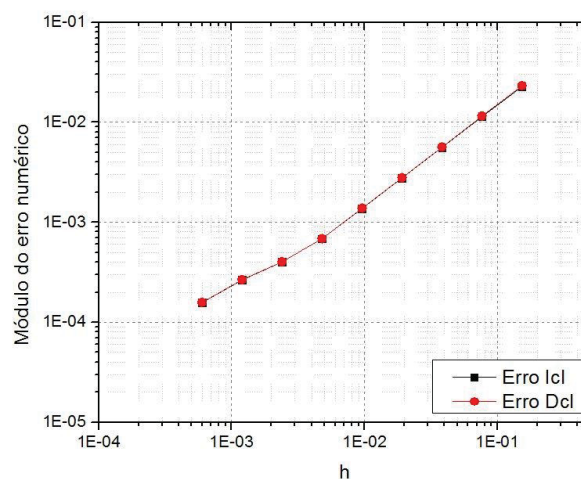


FIGURA 193 - ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ICL E DCL.

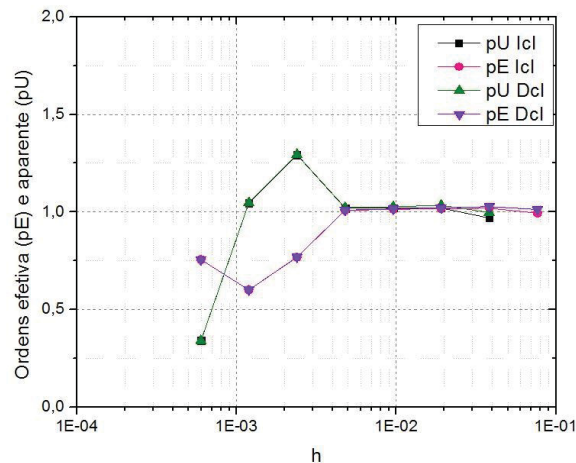
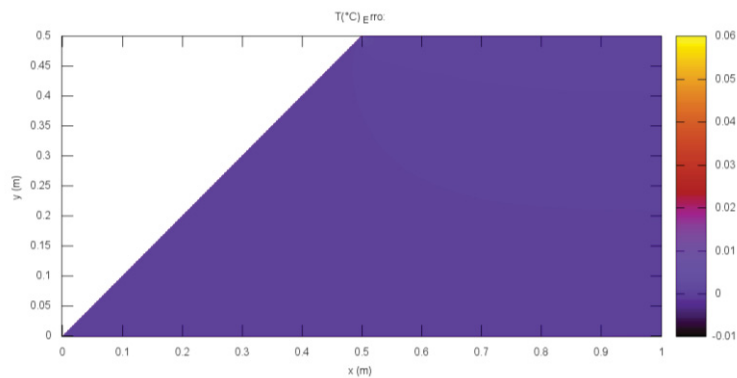


FIGURA 194 - CAMPO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO APLICADAS COM VOLUMES DE ESPESSURA ZERO COM A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.



#### 5.4 COMPARAÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O TRAPÉZIO

Nesta seção está apresentado o resumo dos valores das ordens efetiva (pE) e aparente (pU) obtidas para as técnicas estudadas neste trabalho. Também é apresentada a comparação em relação ao módulo do erro numérico obtido para cada caso.

##### *Dirichlet*

A Tabela 7 apresenta a comparação entre o módulo do erro numérico para as três técnicas de aplicação de condição de contorno com a condição de contorno de Dirichlet. As técnicas estão ordenadas do menor erro para o maior erro numérico obtido.

Em seguida, apresenta-se a Tabela 8, onde consta o resumo dos valores para as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) mais próximos do esperado *a posteriori* para cada variável, e que nos casos possíveis, não apresente um comportamento não monotônico. Observa-se que para as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) há uma degeneração no valor esperado a partir do cálculo *a priori* para algumas variáveis. Ou seja, *a priori*, esperava-se ordens tendendo a 2 para as variáveis estudadas.

TABELA 7 - COMPARAÇÃO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO ENTRE AS TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA DIRICHLET.

Variável de interesse	Menor erro numérico - Lagrange	Menor erro numérico - Elípticas
<b>Erro de <math>T_m</math></b>	Balanço de Volumes Volumes fictícios Volumes de espessura zero	Balanço de Volumes Volumes fictícios Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>T_{interno}</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>Icl</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>Dcl</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero

### Neumann

Em seguida, são apresentados a comparação e o resumo para a condição de contorno de Neumann aplicada com as três técnicas estudadas. Na Tabela 9 está a comparação entre o módulo do erro numérico para as três técnicas de aplicação de condição de contorno com a condição de contorno de Neumann. As técnicas estão ordenadas na tabela do menor erro numérico obtido para o maior erro numérico para cada uma das variáveis.

TABELA 8 - RESUMO DAS ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ESTUDADAS.

<b>Variável de interesse</b>	<b>Ordens <i>a posteriori</i> – Lagrange</b>	<b>Ordens <i>a posteriori</i> - Elípticas</b>
$T_m$	$p_U = 1,4$ $p_E = 1,4$ Volumes fictícios	$p_U = 1,4$ $p_E = 1,4$ Volumes fictícios
$T_1, T_2, T_3, T_4$	$p_U = 1$ $p_E = 1,4$ Balanço de volume	$p_U = NM$ $p_E = 1,4$ Balanço de volume
$Icl$	$p_U = 2$ $p_E = 2$ Balanço de volume e volumes fictícios	$p_U = 2$ $p_E = 2$ Balanço de volume
$Dcl$	$p_U = 1,7$ $p_E = 1,7$ Volumes de espessura zero	$p_U = 1,7$ $p_E = 1,7$ Volumes de espessura zero

Em seguida, está a Tabela 10, onde há um resumo dos valores para as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) mais próximos do esperado *a posteriori* obtidos para cada variável estudada, e que nos casos possíveis, não apresente um comportamento não monotônico. Analogamente ao que ocorre com a condição de contorno de Dirichlet visto anteriormente, observa-se que há uma degeneração no valor das ordens esperado a partir do cálculo *a priori*, onde obteve-se o valor 2.

TABELA 9 - COMPARAÇÃO DO MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO ENTRE AS TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DE CONDIÇÃO DE CONTOURNO PARA NEUMANN.

<b>Variável de interesse</b>	<b>Menor erro numérico - Lagrange</b>	<b>Menor erro numérico - Elípticas</b>
<b>Erro de <math>T_m</math></b>	Balanço de Volumes Volumes fictícios Volumes de espessura zero	Volumes de espessura zero Balanço de Volumes Volumes fictícios
<b>Erro <math>T_{interno}</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Balanço de Volumes Volumes de espessura zero Volumes fictícios
<b>Erro <math>Icl</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero
<b>Erro <math>Dcl</math></b>	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero	Volumes fictícios Balanço de Volumes Volumes de espessura zero

TABELA 10 - RESUMO DAS ORDENS EFETIVA (PE) E APARENTE (PU) PARA AS VARIÁVEIS ESTUDADAS.

<b>Variável de interesse</b>	<b>Ordens a posteriori - Lagrange</b>	<b>Ordens a posteriori - Elípticas</b>
<b><math>T_m</math></b>	$p_U = 1 \quad p_E = 1$ Balanço de Volume	$p_U = 1 \quad p_E = 1$ Balanço de Volume
<b><math>T_1, T_2, T_3, T_4</math></b>	$p_U = 1 \quad p_E = 1,5$ Volumes fictícios e balanço de volume	$p_U = 1 \quad p_E = 1$ Balanço de volumes
<b><math>Icl</math></b>	$p_U = 1 \quad p_E = 1$ Balanço de volume e volumes de espessura zero	$p_U = 0,9 \quad p_E = 0,9$ Balanço de volume
<b><math>Dcl</math></b>	$p_U = 1 \quad p_E = 1$ Balanço de volume e volumes de espessura zero	$p_U = 1,2 \quad p_E = 1,2$ Balanço de volume

## 6 CONCLUSÃO

Este capítulo apresenta um resumo das principais conclusões e constatações deste trabalho, além de apresentar as contribuições desta dissertação. Por fim, são apresentados as sugestões para trabalhos futuros, tendo como objetivo a expansão e continuação deste trabalho.

### 6.1 CONSTATAÇÕES GERAIS

No presente trabalho foram apresentadas três formas de aplicação de condição de contorno: volumes fictícios, balanço de volumes e volumes de espessura zero. Para cada uma dessas técnicas, foram aplicadas condições de contorno de Dirichlet e Neumann em duas geometrias: no L e no trapézio. Os estudos foram realizados envolvendo dois tipos de malhas: geradas através de interpolação de Lagrange e através de equações elípticas. Para a equação de Poisson utilizada foram estudadas quatro variáveis, além do módulo do erro numérico para cada uma delas. Inicialmente as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) foram obtidas *a priori* e *a posteriori* para cada variável estudada.

Observou-se que houve, para todas as técnicas, na maioria dos casos degeneração da ordem esperada para algumas variáveis. Entre os casos estudados, se tratando da condição de contorno de Dirichlet, o menor erro obtido em geral para a geometria do L foi com a técnica dos volumes fictícios para a malha gerada através de equações elípticas; e o mesmo ocorre para a condição de contorno de Neumann. Para a geometria do trapézio, o menor erro numérico obtido de um modo geral com a condição de contorno de Dirichlet foi com a aplicação de volumes fictícios; e para a condição de contorno de Neumann, também de um modo geral, se apresenta a técnica de volumes fictícios, seguido da técnica de volumes de espessura zero.

Em relação as ordens efetiva (pE) e aparente (pU) observou-se que para a geometria do L, as variáveis da média da temperatura no contorno leste ( $I_{cl}$ ), bem como a média do fluxo da temperatura no contorno leste ( $D_{cl}$ ) para a condição de contorno de Dirichlet com a técnica dos volumes fictícios e balanço de volumes para as malhas de Lagrange não tiveram degeneração, enquanto para as malhas elípticas, para a técnica de balanço de volumes obteve-se a

ordem esperada seguida de comportamento não monotônico; o mesmo não ocorre para a condição de contorno de Neumann, onde houve degeneração para todos os casos. Para a geometria do trapézio, com a condição e contorno de Dirichlet, não houve degeneração para a variável ( $I_{cl}$ ) com as malhas de Lagrange para a técnica dos volumes fictícios, e para ambas as malhas para balanço de volumes; para Neumann houve degeneração para todas as variáveis.

Giacomini (2009) em seu trabalho, utilizando a equação de Poisson para um problema unidimensional, observou que para as três técnicas aqui estudadas, o erro numérico qualitativamente igual entre as variáveis de interesse estudadas. Em relação as variáveis estudadas, Giacomini (2009), observou que as ordens *a posteriori* são iguais às *a priori* para as quase todas as variáveis estudadas com as três técnicas. Entretanto, para a variável da derivada no contorno com aproximação de ordem 2, houve degeneração para as três técnicas de aplicação de condição de contorno aqui estudadas. Uma possível explicação para a degeneração, segundo Giacomini (2009), estaria relacionado ao erro de poluição, ou seja, dos erros de truncamento e discretização.

No presente trabalho, uma possível explicação para a degeneração de ordem se trata do tipo de malha empregada, sendo ela não ortogonal aplicada nas geometrias estudadas, e pode introduzir erro de ordem 1. Segundo Ferziger e Peric (2002), existem dificuldades na aplicação de malhas não ortogonais, por exemplo, na equação transformada, a não ortogonalidade do sistema, representada por  $\beta$ , multiplicada as derivadas, e depende do ângulo entre as linhas da malha. Isto pode levar à uma má convergência e oscilações na solução. Além disso, também obtém-se, como mencionado anteriormente, erros de poluição. Outras explicações poderiam ser o refino da malha, que em alguns casos pode gerar degeneração da ordem (SCHNEIDER, 2007), para o presente trabalho, consideramos a malha uniforme, quando se observa volumes diferentes na malha gerada, e assim, malhas não-uniformes quando empregadas o esquema CDS-2, o erro de truncamento degenera (FERZIGER E PERIC, 2001).

Além disso, segundo Roy *et al* (2003) uma possível explicação para o comportamento da ordem visto em alguns casos, como por exemplo na Fig. 53 para a geometria do L e na Fig. 123 para o trapézio, é que os erros de cada fonte poderiam ter erros de sinais contrários e geram cancelamento para um valor de



h específico. Assim, o erro numérico tende a zero e a ordem aparente apresenta saltos para mais ou menos infinito.

Por fim, de modo geral, para a geometria do L, quando se tratando da condição de contorno de Dirichlet, a melhor técnica quando comparando o erro numérico, é de volumes fictícios. Porém, quando leva-se em consideração as ordens estudadas, a técnica de balanço de volumes é preferível. O mesmo se aplica quando utilizada a condição de contorno de Neumann. O mesmo se aplica para a geometria do trapézio.

## 6.2 CONTRIBUIÇÕES

Resumidamente, as contribuições podem ser citadas como sendo:

- foi mostrada as, para as variáveis estudadas, qual técnica e condição de contorno apresente o menor erro numérico;
- observou-se quais variáveis estudadas obtiveram degeneração de ordem para os problemas aqui estudados, bem como para quais variáveis e técnicas não foi observado o mesmo;
- foram citados motivos relacionados às dificuldades encontradas na determinação da ordem;
- observou-se para cada variável estudada qual técnica é melhor aplicada dependendo da condição de contorno de Dirichlet e de Neumann;
- as dificuldades encontradas quando trabalhando com as duas geometrias para as malhas empregadas não ortogonais;
- foram deduzidas as ordens *a priori* do erro de truncamento, o que confirma a existência das ordens verdadeiras em relação a estimativa do erro numérico.

## 6.3 TRABALHOS FUTUROS

Para futuros trabalhos, com o objetivo de expandir e complementar o presente trabalho, os seguintes temas são sugeridos:

- expansão da equação governante para um sistema tridimensional;

- incluir um estado transiente para a equação governante para verificação do comportamento *a posteriori*;
- resolver para outras geometrias, utilizando a mesma malha estruturada não ortogonal para verificação *a posteriori*;
- resolver o mesmo estudo considerando uma malha com volumes de tamanhos uniformes para verificação *a posteriori*;
- resolver outras equações, como equação de Adveção-Difusão, Burgers, Euler e Navier-Stokes com escoamento laminar bidimensional;
- estudar modelos matemáticos com fenômenos físicos diferentes, como por exemplo, turbulência para análise de erros.

## REFERÊNCIAS

AIAA. **Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations**. AIAA G-077-1998. Reston, 1998.

ANDRADE, H. C. C. **O Método dos Volumes Finitos Aplicados a Escoamentos de Convecção Forçada e Natural**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. Further Discussion of Numerical Error in CFD. **Internacional Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 23, p. 1263-1274, 1996.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 3ed. Berlin: Springer, 2002.

FINLAYSON, B. A. **The Method of Weighted Residuals and Variational Principles: with Applications in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer**. Mathematics in Science and Engineering, volume 87. Department of Chemical Engineering, University of Washington. New York and London: Academic Press. 1972.

FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos**. São Paulo: Edusp, 2000.

FOLKNER, D.; KATZ, A.; SANKARAN, V. Design and verification methodology of boundary conditions for finite volume schemes. **Computers & Fluid**, v. 96, p. 264-275, 2014.

GIACOMINI, F. F. **Verificação da Forma de Aplicar Condições de Contorno em Problemas Unidimensionais com o Método dos Volumes Finitos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

INCROPERA, F. P.; DeWITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 5ed. Tradução: Carlos Alberto Biolchini da Silva. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 8 ed. New York: Wiley, 1999.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

MARCHI, C. H. **Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2001.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. **Condições Suficientes para Estimar com Acurácia e Confiabilidade Erro de Discretização em CFD**. Em: 20th Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia. XX CILAMCE 16.1-16.20. São Paulo, 1999.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional Numerical Solution Error Estimation for Convergent Apparent Order. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v.42, p. 167-188, 2002.

MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. **The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM® and Matlab®**. Suíça: Springer, 2016.

OBERKAMPF, W.; TRUCANO, T. G. Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics. **Progress in Aerospace Sciences**, v.38, p.209-272, 2002.

OBERKAMPF, W. L.; BARONE, F. G. Measures of agreement between computations and experiment: validation metrics. **Journal of Computational Physics**, v. 217, p. 5-36, 2006.

OOSTERLEE, C. W.; WESSELING, P.; SEGAL, A.; BRAKKEE, E. Benchmark Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations in General Coordinates on Staggered Grids. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 17, pp. 301-321, 1993.

PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. Washington: Taylor & Francis, 1980.

PIRES, L. F. G. **Método Numérico para Solução de Escoamentos Utilizando Componentes Contravariantes em Coordenadas Não Ortogonais**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 1994.

REPIN, S.; SAUTER, S.; SMOLIANSKI, A. A posteriori error estimation for the Poisson equation with mixed Dirichlet/Neumann boundary conditions. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 164-165, p. 601-612, 2004.

RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v. 210, p. 307-357, 1910.

RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The deferred approach to the limit. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v. 226, p. 299-361, 1927.

ROACHE, P. J. Perspective: a Method for Uniform Reporting of a Grid Refinement Studies. **Journal of Fluid Engineering**, v. 116, pp. 405-413, 1994.

ROACHE, P. J. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**. Albuquerque: hermosa Publishers, 1998.

ROACHE, P. J. Building PDE Codes to be Verifiable and Validatable. **Computing in Science & Engineering**, v. 6, pp. 30-38, 2004.

ROY, C. J.; MCWHERTER-PAYNE, M. A.; OBERKAMPF, W. L. Verifications and Validation for Laminar Hypersonic Flowfields Part 1: Verification. **AIAA Journal**, v. 41, nº 10, 2003.

SCHNEIDER, F. A. **Verificação de Soluções Numéricas em Problemas Difusivos e Advectivos com Malhas não-uniformes**. Tese de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia. Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, 2007.

SCHNEIDER, F. A; MARCHI, C. H. On the grid refinement ratio for one-dimensional advective problems with nonuniform grids. **18<sup>th</sup> COBEM**, CD-ROM, Ouro Preto, 2005.

SCHNEIDER, F. A; MARCHI, C. H. Efeito do tipo de refino de malhas não uniformes de volumes finitos sobre a ordem efetiva do erro de discretização. **XXVII CILAMCE**, CD-ROM, Belém, 2006.

SCHUMANN, U; SWEET, R. A. A Direct Method For Solution Of Poisson's Equation With Neumann Boundary Conditions On A Staggered Grid Of Arbitrary Size. **Journal of Computational Physics**, v. 20, pp. 171-182, 1976.

SHIH, T, M., TAN, C, H., HWANG, B, C. Effects of Grid Staggering on Numerical Scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 9, pp. 193-212, 1989.

SUERO, R. **Verificação de Soluções Numéricas de Escoamentos Bidimensionais Laminares em Malhas Uniformes**. Dissertação de Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia. Universidade Federal do Paraná – UFPR. Curitiba, 2006.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. 2ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1997.

THOMPSON, J, F.; THAMES, F. C.; MASTIN, C. W. Boundary-fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing any number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies. **NASA Report No. CR-2729, National Aeronautics and Space Administration**, Washington, D.C., 1977.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: the finite volume method**. 2ed. Harlow, England: Pearson/Prentice Hall, 2007.

WINSLOW, A. M. Numerical Solution of a Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh. **Journal of Computational Physics 2**, Livermore, California. 1967.

WS ATKINS CONSULTANTS. **Best Practice Guidelines for Marine Applications of CFD**. MARNET – CFD Report, 2002.

## APÊNDICE A . Obtenção Das Estimativas De Erros *A Priori*

As estimativas *a priori* são feitas através da expansão da série de Taylor, onde é possível obter as ordens assintótica ( $p_L$ ) e verdadeiras ( $p_V$ ) do erro de truncamento. Dado isso, para as variáveis de interesse mostradas na Tab. 2, faz-se a expansão da série de Taylor em torno das faces leste ( $e$ ), oeste ( $w$ ), norte ( $n$ ) e sul ( $s$ ). Considere, por exemplo, na Fig. 3 com a disposição dos volumes na malha sendo uniforme, e assumindo as notações para a direção  $\xi$  para a face oeste ( $w$ ):

$$\phi_w = \phi(\xi); \quad \phi_W = \phi\left(\xi - \frac{\Delta\xi}{2}\right); \quad \phi_P = \phi\left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}\right) \quad (\text{A.1})$$

as expansões para a série de Taylor para volumes ( $W$ ) e ( $P$ ) em torno da face ( $w$ ) é do tipo

$$T_W = T_w - T_w^i \frac{\Delta\xi}{2} + T_w^{ii} \frac{\Delta\xi^2}{8} - T_w^{iii} \frac{\Delta\xi^3}{48} + T_w^{iv} \frac{\Delta\xi^4}{384} - T_w^v \frac{\Delta\xi^5}{3840} + \dots \quad (\text{A.2})$$

$$T_P = T_w + T_w^i \frac{\Delta\xi}{2} + T_w^{ii} \frac{\Delta\xi^2}{8} + T_w^{iii} \frac{\Delta\xi^3}{48} + T_w^{iv} \frac{\Delta\xi^4}{384} + T_w^v \frac{\Delta\xi^5}{3840} + \dots \quad (\text{A.3})$$

subtraindo as Eqs. (A.2) e (A.3), tem-se que a aproximação para a derivada de primeira ordem para da variável de interesse é

$$T_w^i = \frac{(T_P - T_w)}{\Delta\xi} - T_w^{iii} \frac{\Delta\xi^2}{24} - T_w^v \frac{\Delta\xi^4}{1920} - \dots \quad (\text{A.4})$$

O primeiro termo do segundo membro da Eq. (A.4) representa a aproximação da série de Taylor para a variável de interesse  $T$  do tipo CDS-2 e os restantes são os termos do erro de truncamento. Desta forma,

$$T_w^i = \frac{(T_P - T_w)}{\Delta\xi} - \varepsilon_\tau(T_w^i) \quad (\text{A.5})$$

Ainda, as ordens verdadeiras do erro de truncamento são:  $p_V = 2, 4, 6, \dots$ ; sendo a ordem assintótica  $p_L = 2$ . Se ao invés de substituir as Eqs. (A.2) e (A.3), elas forem substituídas, obtém-se a seguinte aproximação

$$T_w^i = \frac{(T_P + T_w)}{2} - T_w^{ii} \frac{\Delta\xi^2}{8} - T_w^{iv} \frac{\Delta\xi^4}{384} - \dots \quad (\text{A.6})$$

que representa a expansão da série de Taylor obtida para a variável de interesse através da média aritmética entre dois volumes vizinhos. O primeiro termo do segundo membro é aproximação para a derivada de primeira ordem do tipo CDS-2, enquanto os outros termos é o erro de truncamento. Desta forma,

$$T_w^i = \frac{(T_P + T_w)}{2} - \varepsilon_\tau(T_w^i) \quad (\text{A.7})$$

Assim como visto anteriormente, as ordens verdadeiras  $p_V = 2, 4, 6, \dots$ , enquanto a ordem assintótica é  $p_L = 2$ . Para a derivada de primeira ordem para a aproximação DDS no contorno leste, considerando a Eq. (A.9) a seguir e a seguintes notações

$$\phi_e = \phi(\xi); \quad \phi_P = \phi\left(\xi - \frac{\Delta\xi}{2}\right) \quad (\text{A.8})$$

$$T_P = T_e + T_e^i \frac{\Delta\xi}{2} + T_w^{ii} \frac{\Delta\xi^2}{8} + T_w^{iii} \frac{\Delta\xi^3}{48} + T_w^{iv} \frac{\Delta\xi^4}{384} + T_w^v \frac{\Delta\xi^5}{3840} + \dots \quad (\text{A.9})$$

Isolando a derivada de primeira ordem

$$T_e^i = \frac{2(T_e - T_P)}{\Delta\xi} - T_w^{ii} \frac{\Delta\xi}{4} - T_w^{iii} \frac{\Delta\xi^2}{24} - T_w^{iv} \frac{\Delta\xi^3}{192} + \dots \quad (\text{A.10})$$



assim, o primeiro termo do segundo membro é a aproximação DDS para o contorno leste do domínio, onde  $x = 1$ ; enquanto os outros termos representam o erro de truncamento da aproximação. Desta forma, as ordens verdadeiras são  $p_V = 1, 2, 3, \dots$ , enquanto a ordem assintótica é  $p_L = 1$ .

## APÊNDICE B . Coeficientes e termos fontes da equação governante

A equação de Poisson bidimensional transformada, Eq. (B.1) e seu termo fonte ( $S$ ) representado pela Eq. (B.2), foi discretizada com o método dos volumes finitos, utilizando aproximações de segunda ordem e tipos de condição de contorno de Dirichlet e Neumann.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ J \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ J \left( \gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] = \frac{S}{J} \quad (\text{B.1})$$

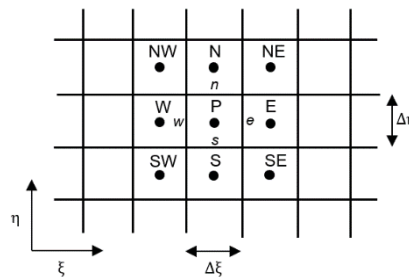
$$S(x, y) = - \frac{\pi^2}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} y \right) \quad (\text{B.2})$$

A solução analítica é dada pela Eq. (B.3), onde é possível obter os valores prescritos nas fronteiras das geometrias, conforme as Eqs. (3.4) à (3.10).

$$T(x, y) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} y \right) \quad (\text{B.3})$$

A discretização realizada para os volumes internos é igual para todas as formas de aplicação de condições de contorno estudadas no presente trabalho. Desta forma, considere a Fig. B.1 onde é representado o volume interno  $P$ , bem como seus vizinhos  $E, W, N, S, NW, NE, SW$  e  $SE$ .

FIGURA B 1 - DISCRETIZAÇÃO PELO MVF COM REPRESENTAÇÃO DE TODOS OS VOLUMES VIZINHOS.



Integrando então a Eq. (B.1) para o volume de controle  $P$  entre as faces  $e$  e  $w$ , e também entre  $n$  e  $s$ , realizando as aproximações e substituindo-as na

Eq. (B.4), são obtidos os coeficientes válidos para todos os volumes internos, os quais são dados pelas Eqs. (3.55) à (3.62).

$$a_p T_P = a_e T_E + a_w T_W + a_n T_N + a_s T_S + a_{ne} T_{NE} + a_{nw} T_{NW} + a_{se} T_{SE} + a_{sw} T_{SW} + b_p \quad (\text{B.4})$$

Em seguida, são realizadas as discretizações para obter os coeficientes e termo fonte para as três formas de aplicar as condições de contorno: com volume fictício, sem volume fictício e com volumes de espessura zero, apresentadas a seguir.

### Condições de Contorno Aplicadas Com Volumes fictícios

#### *Dirichlet*

Os coeficientes e termos fontes para a forma de aplicar condições de contorno com volumes fictícios do tipo Dirichlet são dados por:

- para os volumes do contorno leste

$$T_w = \frac{T_P + T_W}{2} \rightarrow T_P = -T_W + 2 T_w \quad (\text{B.5})$$

onde  $T_w$  é o valor da fronteira prescrito calculado através da solução analítica;  $T_P$  e  $T_W$  são os valores da temperatura calculadas nos centroides dos volumes através do Gauss-Seidel. Os coeficientes são mostrados a seguir

#### **Geometria em L**

$$a_w = -1$$

$$a_p = 1$$

$$T_w = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

#### **Trapézio**

$$a_w = -1$$

$$a_p = 1$$

$$T_w = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

Os coeficientes para os demais contornos são calculados de maneira análogo, considerando que a temperatura prescrita irá mudar conforme as condições de contorno baseada na solução analítica.

### **Neumann**

Foram escolhidos somente dois contornos para aplicação de condições de contorno do tipo Neumann, pois aplicando-o nas quatro faces pode-se obter infinitas soluções; para os outros dois contornos permaneceram as condições de contorno do tipo Dirichlet.

Para a geometria em L, os contornos para a condição de contorno do tipo Neumann escolhido foram oeste e leste; enquanto para a geometria do trapézio os contornos escolhidos foram norte e leste. Os demais contornos são válidas a condição de contorno de Dirichlet apresentada anteriormente. Considerando a lei de Fourier (Eq. 2.20) que prescreve a condição de fluxo, segundo Maliska (2013) a expressão para a condição de contorno de Neumann com volumes fictícios para o leste, por exemplo, é dada por

$$T_P = T_W + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} (T_N + T_{NW} - T_S - T_{SW}) + \frac{q''}{\Gamma \phi} \frac{\Delta \xi}{J \alpha^{1/2}} \quad (\text{B.6})$$

Dado isso, os coeficientes e termo fonte para a forma de aplicar condições de contorno com volumes fictícios do tipo Neumann, são dados por:

- para o contorno leste

<b>Geometria em L</b>	<b>Trapézio</b>
$a_W = 1$	$a_W = 1$
$a_P = 1$	$a_P = 1$
$a_N = a_{NW} = -a_S = -a_{SW} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta}$	$a_N = a_{NW} = -a_S = -a_{SW} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta}$
$\frac{q''}{\Gamma \phi} = \frac{\partial T_w}{\partial x} = 0$	$\frac{q''}{\Gamma \phi} = \frac{\partial T_w}{\partial x} = 0$

## Condições de Contorno Aplicadas Sem Volumes fictícios

### Dirichlet

Os coeficientes e termos fontes para a forma de aplicar condições de contorno sem volumes fictícios com Dirichlet são divididos entre os volumes dos contornos e os volumes dos cantos. Para os cantos, considere a Fig. B.2, sendo assim, os coeficientes do canto sudeste, por exemplo, são dados por:

- canto sudeste

$$\begin{aligned}
 a_w &= \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} - \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \\
 a_n &= \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + \frac{J_w \beta_w}{3 \Delta \xi} \\
 a_{nw} &= \frac{J_w \beta_w}{3 \Delta \eta} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \\
 a_p &= 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} + \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + 2 \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} \\
 bp &= -\frac{S}{J} \Delta \xi \Delta \eta + T_s \left( 2 \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} - \frac{J_w \beta_w}{3 \Delta \eta} \right) - T_{sw} \left( \frac{J_w \beta_w}{3 \Delta \eta} \right) + T_e \left( 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} - \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \right) \\
 &\quad - T_{ve} \left( \frac{J_e \beta_e}{\Delta \eta} \right) + T_c \left( \frac{J_e \beta_e}{\Delta \eta} + \frac{J_s \beta_s}{\Delta \xi} \right) - T_{ne} \left( \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \right) - T_{vs} \left( \frac{J_s \beta_s}{\Delta \xi} \right)
 \end{aligned}$$

sendo  $T_s, T_{sw}, T_e, T_{ne}$  as temperaturas prescritas nos centros das faces do domínio,  $T_{ve}$  e  $T_{vs}$  as temperaturas prescritas nos vértices do domínio e  $T_c$  a temperatura avaliada no canto. Os coeficientes e termo fonte são válidos para ambas geometrias. Todas as temperaturas prescritas são obtidas através da solução analítica, e os outros cantos são obtidos de maneira análoga. Sendo assim

#### Geometria em L

$$T_s = T_{sw} = 0$$

$$T_{vs} = 0$$

#### Trapézio

$$T_s = T_{sw} = 0$$

$$T_{vs} = 0$$

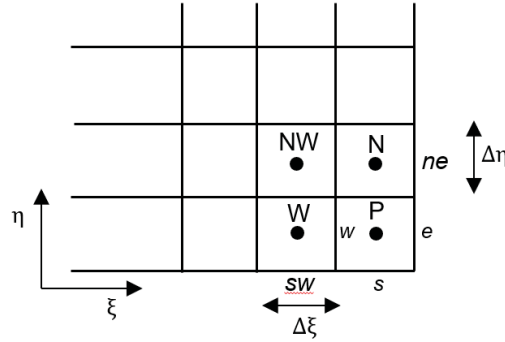
$$T_e = T_{ne} = T_{ve} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

$$T_c = 0$$

$$T_e = T_{ne} = T_{ve} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

$$T_c = 0$$

FIGURA B 2 - EXEMPLO DE VOLUME NO CANTO PARA BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA.



Para os coeficientes dos contornos (FIGURA B.3), considerando como exemplo o contorno leste, a aproximação para os volumes nas faces é feita por (MALISKA, 2013)

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_e} = \frac{(T_e - T_p)}{\frac{\Delta \xi}{2}} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_e} = \frac{(T_{ne} - T_{se})}{2 \Delta \eta} \quad (\text{B.8})$$

onde  $T_e$ ,  $T_{ne}$  e  $T_{se}$  são as temperaturas na fronteira e calculados com a solução analítica. Dado isso,

- contorno leste

$$a_w = \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} - \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta \xi}$$

$$a_N = \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + \frac{J_w \beta_w}{4 \Delta \eta}$$

$$a_s = -\frac{J_w \beta_w}{4 \Delta \eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta}$$

$$\begin{aligned}
 a_{NW} &= \frac{J_w \beta_w}{4 \Delta \eta} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \\
 a_{SW} &= -\frac{J_w \beta_w}{4 \Delta \eta} + \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta \xi} \\
 a_p &= \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} + 2 \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} \\
 bp &= -\frac{S}{J} \Delta \xi \Delta \eta + T_e \left( 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} - \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \eta} + \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta \xi} \right) - T_{ne} \left( \frac{J_e \beta_e}{2 \Delta \eta} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \right) \\
 &\quad - T_{se} \left( \frac{J_e \beta_e}{2 \Delta \eta} + \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta \xi} \right)
 \end{aligned}$$

sendo  $T_e, T_{ne}, T_{se}$  as temperaturas prescritas nos centros das faces do domínio. Os coeficientes e termo fonte são válidos para ambas geometrias. Todas as temperaturas são obtidas através da solução analítica. Sendo assim

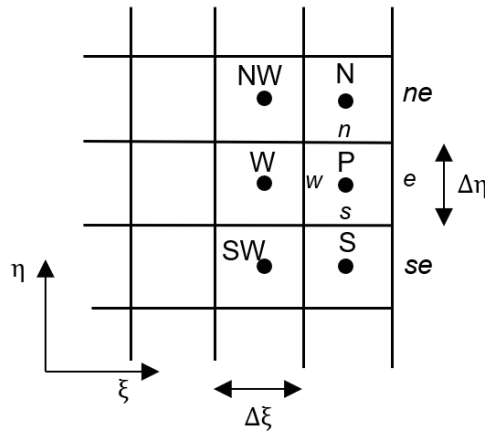
#### Geometria em L

$$T_e = T_{ne} = T_{se} = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} y \right)$$

#### Trapézio

$$T_e = T_{ne} = T_{se} = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} y \right)$$

FIGURA B 3 - EXEMPLO DE VOLUMES NO CONTORNO COM A TÉCNICA BALANÇO DE VOLUMES NA FRONTEIRA.



#### Neumann

Os coeficientes e termos fontes para a técnica de aplicar condições de contorno sem volumes fictícios com Neumann são divididos entre os volumes dos contornos e os volumes dos cantos, como anteriormente para a condição de

contorno de Dirichlet. Também, como feito anteriormente na técnica de volumes fictícios, a condição de contorno de Neumann foi aplicada em somente dois contornos: para a geometria em L, oeste e leste, e para a geometria do trapézio, norte e leste.

Sendo assim, os coeficientes dos cantos são dados por:

- canto sudeste

$$\begin{aligned}
 a_W &= \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} - \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \\
 a_N &= \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + \frac{J_w \beta_w}{3 \Delta \xi} \\
 a_{NW} &= \frac{J_w \beta_w}{3 \Delta \eta} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \\
 a_p &= 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} + \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + 2 \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} \\
 bp &= -\frac{S}{J} \Delta \xi \Delta \eta + T_s \left( 2 \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} - \frac{J_w \beta_w}{3 \Delta \eta} \right) - T_{sw} \left( \frac{J_w \beta_w}{3 \Delta \eta} \right) + T_e \left( 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} - \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \right) \\
 &\quad - T_{ve} \left( \frac{J_e \beta_e}{\Delta \eta} \right) + T_c \left( \frac{J_e \beta_e}{\Delta \eta} + \frac{J_s \beta_s}{\Delta \xi} \right) - T_{ne} \left( \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \right) - T_{vs} \left( \frac{J_s \beta_s}{\Delta \xi} \right)
 \end{aligned}$$

sendo  $T_s, T_{sw}, T_e, T_{ne}$  as temperaturas prescritas nos centros das faces do domínio,  $T_{ve}$  e  $T_{vs}$  as temperaturas prescritas nos vértices do domínio e  $T_c$  a temperatura avaliada no canto. Os coeficientes e termo fonte são válidos para ambas geometrias. Todas as temperaturas são obtidas através da solução analítica. Sendo assim

#### Geometria em L

$$T_s = T_{sw} = 0$$

$$T_{vs} = 0$$

$$T_e = T_{ne} = T_{ve} = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} x \right)$$

$$T_c = 0$$

#### Trapézio

$$T_s = T_{sw} = 0$$

$$T_{vs} = 0$$

$$T_e = T_{ne} = T_{ve} = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} x \right)$$

$$T_c = 0$$

- contorno leste

$$a_W = \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} - \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta \xi}$$



$$\begin{aligned}
a_N &= \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + \frac{J_w \beta_w}{4 \Delta \eta} \\
a_S &= -\frac{J_w \beta_w}{4 \Delta \eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} \\
a_{NW} &= \frac{J_w \beta_w}{4 \Delta \eta} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \\
a_{SW} &= -\frac{J_w \beta_w}{4 \Delta \eta} + \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta \xi} \\
a_p &= \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} + 2 \frac{J_w \alpha_w}{\Delta \xi} + \frac{J_n \gamma_n}{\Delta \eta} + \frac{J_s \gamma_s}{\Delta \eta} \\
bp &= -\frac{S}{J} \Delta \xi \Delta \eta + T_e \left( 2 \frac{J_e \alpha_e}{\Delta \xi} - \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \eta} + \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta \xi} \right) - T_{ne} \left( \frac{J_e \beta_e}{2 \Delta \eta} + \frac{J_n \beta_n}{3 \Delta \xi} \right) \\
&\quad - T_{se} \left( \frac{J_e \beta_e}{2 \Delta \eta} + \frac{J_s \beta_s}{3 \Delta \xi} \right)
\end{aligned}$$

sendo  $T_e, T_{ne}, T_{se}$  as temperaturas prescritas nos centros das faces do domínio. Os coeficientes e termo fonte são válidos para ambas geometrias. Todas as temperaturas são obtidas através da solução analítica. Sendo assim

#### Geometria em L

$$T_e = T_{ne} = T_{se} = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} y \right)$$

#### Trapézio

$$T_e = T_{ne} = T_{se} = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} y \right)$$

### Condições de Contorno Aplicadas Com Volumes de Espessura Zero

#### Dirichlet

Os coeficientes e termos fontes para a forma de aplicar condições de contorno com volumes de espessura zero do tipo Dirichlet são dados por:

- para os volumes do contorno leste

$$T_P = T_{cc} \quad (\text{B.9})$$

onde  $T_{cc}$  é o valor da fronteira prescrito;  $T_p$  o valor da temperatura calculada nos centroide do volume através do Gauss-Seidel. Os coeficientes são mostrados a seguir

#### Geometria em L

$$a_p = 1$$

$$T_e = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

#### Trapézio

$$a_p = 1$$

$$T_e = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

### Neumann

Foram escolhidos os contornos oeste e leste para a geometria em formato de L para aplicação de condições de contorno do tipo Neumann. Enquanto para o trapézio foram escolhidos os contornos norte e leste para a aplicação de contorno do tipo Neumann. Já para as outros dois contornos permaneceu a condições de contorno do tipo Dirichlet.

Deste modo, os coeficientes e termo fonte para a forma de aplicar condições de contorno com volumes de espessura zero do tipo Neumann:

- para o contorno leste

#### Geometria em L

$$a_p = 1$$

$$a_w = 1$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial x} = 0$$

#### Trapézio

$$a_p = 1$$

$$a_w = 1$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial x} = 0$$

Para a técnica dos volumes de espessura zero com a condição de contorno de Neumann, o fluxo da temperatura na face foi calculado através da lei de Fourier, dada pela Eq. (2.20), nos contornos a partir da solução analítica.